Daniele Molinini
CFCUL, Universidade de Lisboa
dmolinini@gmail.com

EUREKA PARTE II: O USO DE CONSIDERAÇÕES MECÂNICAS POR ARQUIMEDES EM MATEMÁTICA

O facto de Arquimedes ter utilizado a matemática para descobrir muitas leis físicas, como, por exemplo, a lei da alavanca no seu *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, ou a lei da flutuabilidade no seu *Sobre os Corpos Flutuantes*, é bem conhecido de qualquer pessoa, mesmo vagamente familiarizada com o nome do cientista e matemático siracusano do terceiro século a.C. O que é menos conhecido do não especialista é o facto de Arquimedes também ter utilizado considerações mecânicas para descobrir teoremas matemáticos. Neste artigo, ilustro como Arquimedes usa este "método mecânico" no seu *Método*.

O tratado de Arquimedes *O Método dos Teoremas Mecânicos, para Eratóstenes* (doravante *Método*), descoberto em 1906 por Heiberg no Palimpsesto (ver o meu artigo anterior nesta revista), é inestimável por muitas razões. Entre estas razões destacam-se o facto de nos dar acesso à forma original como Arquimedes chegou a alguns resultados matemáticos e, em segundo lugar, o facto de ter alterado a nossa compreensão da história do desenvolvimento de técnicas infinitárias em matemática. Neste pequeno artigo, o meu objetivo é dar ao leitor uma visão geral do "método mecânico" utilizado por Arquimedes no *Método*. Além disso, na secção final esboçarei um debate que surgiu recentemente entre os historiadores da matemática relativamente ao papel específico (demonstrativo ou não demonstrativo) que Arquimedes atribuiu a tal método.

Como é bem conhecido (pelo menos, entre os historiadores da matemática), Arquimedes mantinha correspondência com três matemáticos que trabalhavam em Alexandria durante o século III a.C.: Dositheus, Eratóstenes e Conon. Conhecemos esta rede, ou "República das Cartas Matemáticas", como Reviel Netz lhe chamou [6, p. 25], porque os três nomes são explicitamente mencionados por Arquimedes na carta introdutória (o "prefácio", digamos) a alguns dos seus tratados. Em particular, Dositheus é o destinatário de quatro tratados (*Quadratura da Parábola*, *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Sobre Conoides e Esferoides* e *Sobre as Espirais*), Eratóstenes é o destinatário do *Método*, enquanto o nome de Conon aparece nos prefácios da *Quadratura da Parábola* e *Sobre as Espirais* (neste último texto, Arquimedes menciona mesmo uma carta previamente enviada a Conon, que incluía um desafio matemático).

O *Método* é, portanto, uma comunicação privada a Eratóstenes. No entanto, este tratado tem um caráter muito diferente de todos os outros tratados de Arquimedes e, mais geralmente, de todos os textos matemáticos gregos que nos foram transmitidos (como, por exemplo, os *Elementos* de Euclides ou as *Cónicas* de Apolónio). O *Método*, de facto, não é apresentado por Arquimedes como um texto matemático que satisfaça todos os requisitos de exatidão. Não oferece o conteúdo matemático rigoroso de uma publicação oficial que tipicamente encontramos em textos matemáticos gregos, mas sim uma exposição do procedimento heurístico que está por detrás das provas formais. Esta heurística inclui a aplicação de princípios mecânicos na matemática. Como Arquimedes escreve no prefácio, dirigindo-se a Eratóstenes:

> "Pensei que seria apropriado escrever e estabelecer para si neste mesmo livro um certo método especial, através do qual poderá reconhecer certas questões matemáticas com a ajuda da mecânica. Estou convencido de que isto não é menos útil para encontrar as provas destes mesmos teoremas. Pois algumas coisas, que primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, foram depois provadas geometricamente, porque a sua investigação pelo referido método não fornece uma demonstração real. Pois é mais fácil fornecer a prova quando adquirimos previamente, pelo método, algum conhecimento das questões do que encontrá-la sem qualquer conhecimento prévio." [1, p. 314, tradução do autor]

Assim, Arquimedes quer mostrar a Eratóstenes como a aplicação de "um certo método especial" em matemática o levou à descoberta de vários teoremas matemáticos, que só mais tarde foram provados. E, crucialmente, ele faz uma distinção clara entre encontrar um teorema através deste procedimento e encontrar uma prova do mesmo teorema. O procedimento heurístico que envolve a mecânica, diz Arquimedes, "não fornece uma demonstração real".

O que é este método heurístico? Como observou o historiador da ciência Eduard Jan Dijksterhuis, que na sua tradução e comentário do trabalho de Arquimedes de 1956 forneceu um dos melhores estudos do *Método*, o método heurístico de Arquimedes tem duas vertentes, e caracteriza-se pela aplicação de dois princípios diferentes: o "método baricêntrico'" e o "método dos indivisíveis". O método baricêntrico faz uso de considerações mecânicas, e mais particularmente da lei da alavanca (encontrada por Arquimedes e publicada no primeiro livro do seu tratado *Sobre o Equilíbrio dos Planos*), em geometria. Consiste em conceber figuras geométricas como estando ligadas a uma alavanca em equilíbrio, para as quais as condições de equilíbrio são estabelecidas. Ao considerar afirmações sobre "pesos" de objetos geométricos (ou seja, os seus comprimentos e áreas) como equivalentes a afirmações sobre proporções geométricas, Arquimedes consegue medir propriedades puramente geométricas.

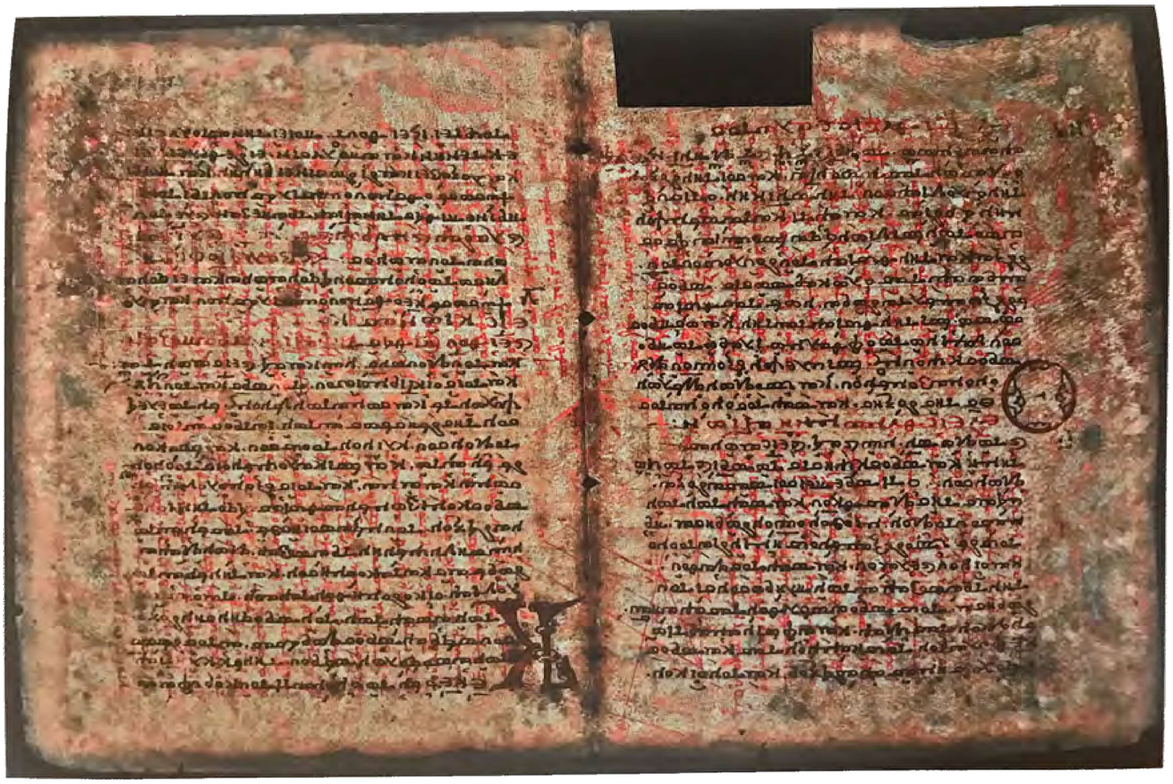

Figura 1. Método, Proposições 1, 2. Pseudocor criada a partir de imagens de fluorescência ultravioleta e refletância vermelha.

O segundo método, o método dos indivisíveis, é uma técnica matemática que permite a medição de figuras geométricas concebendo uma figura composta por elementos de dimensão inferior. Através desta técnica, podemos pensar num sólido como uma soma das secções transversais (os "indivisíveis") que são geradas pelo corte do sólido com uma família de planos paralelos. Do mesmo modo, podemos considerar uma figura plana composta pelos segmentos de linha ("os indivisíveis") formados por um seccionamento paralelo.

Na secção seguinte, dou um exemplo de como Arquimedes aplica o método heurístico. Mais precisamente, relato o seu tratamento matemático da Proposição 1 do *Método*, na qual o método baricêntrico e o método dos indivisíveis são utilizados para descobrir um teorema matemático. Porém, antes de abordar este exemplo, permitam-me acrescentar uma breve observação relativa ao impacto que a utilização de indivisíveis por Arquimedes teve na história da matemática.

O método dos indivisíveis está geralmente associado ao nome de Bonaventura Cavalieri (1598--1647), que o apresentou no seu tratado *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota* (1635). Cavalieri desenvolveu muitas aplicações deste método e o seu trabalho veio a ter um papel significativo no desenvolvimento de métodos infinitesimais durante o século XVII. No entanto, o que o *Método* nos revelou é que a técnica de medir figuras geométricas através de indivisíveis já vem, pelo menos, desde Arquimedes (e talvez até desde mais cedo, como afirmou o historiador da matemática Wilbur Knorr nos seus estudos sobre as raízes do método dos indivisíveis na geometria antiga). Por conseguinte, a descoberta do *Método* levou os historiadores a verem o trabalho de Cavalieri sob uma luz diferente: consideram que a novidade do trabalho realizado por Cavalieri e pelos matemáticos do século XVII reside sobretudo nos seus esforços para conceder à técnica dos indivisíveis uma caracterização formal e sólida, mas já não consideram este método como uma nova técnica introduzida no século XVII (Cavalieri considerava o método como uma nova técnica; mas, como observei no meu primeiro artigo nesta revista, Cavalieri não sabia que Arquimedes utilizava os indivisíveis no *Método*, uma vez que este tratado era desconhecido durante a Renascença). Além disso, a descoberta mostrou também que, embora os matemáticos gregos se mantivessem afastados do infinito nos seus tratados formais, utilizavam o conceito de técnicas infinitas e indivisibilistas nos seus procedimentos heurísticos.

UM EXEMPLO DO MÉTODO: PROPOSIÇÃO 1

O *Método* contém 15 proposições: as proposições 1-11 combinam o método baricêntrico e o método dos indivisíveis; as proposições 12-15 têm uma estrutura mais complexa, uma vez que Arquimedes primeiro prova um certo resultado através dos dois métodos (proposições 12--13), depois obtém o mesmo resultado apenas através dos indivisíveis (proposição 14) e, finalmente, prova novamente o mesmo resultado de forma "clássica", não utilizando nem mecânica nem indivisíveis (proposição 15). No final da Proposição 15, o texto existente é interrompido.

O primeiro resultado do *Método* encontra-se na Proposição 1 e tem a ver com a área de um segmento parabólico (ou seja, a região delimitada por uma parábola e um segmento de reta): qualquer segmento parabólico é quatro terços do triângulo que tem dois vértices nos extremos do segmento de reta, e cujo terceiro vértice é obtido como a intersecção da parábola com a linha paralela ao seu eixo de simetria e passando pelo ponto médio do segmento de reta (figura 2). Arquimedes apresenta um argumento que mostra como, combinando resultados geométricos com a lei da alavanca, foi conduzido a esta descoberta matemática. Vejamos o seu argumento (uma nota para o leitor: Arquimedes não menciona explicitamente muitos resultados que utiliza e que já foram provados por ele ou por outros matemáticos - por exemplo, por Euclides; uma vez que alguns destes resultados são importantes para uma melhor compreensão do argumento, vou mencioná-los entre parênteses retos).

Considere-se um segmento parabólico ABC (doravante ABC_{ps}), delimitado pelo segmento AC e a parábola γ (figura 2). Seja AC bissetado em D e tracemos DB paralelamente ao eixo de simetria, ou diâmetro, da parábola (a linha tra-

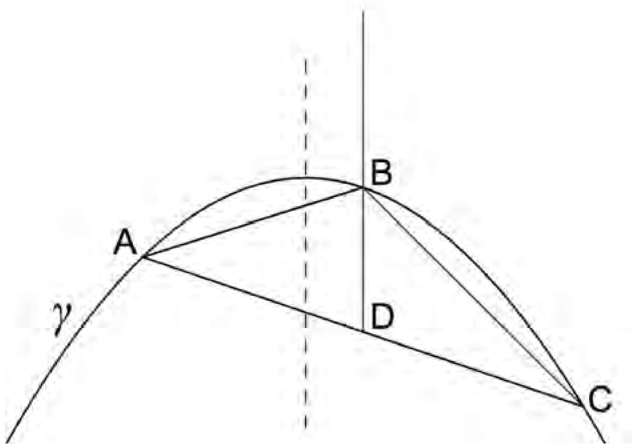

Figura 2.

cejada na figura 2). Tracemos agora AB e BC. Arquimedes mostra que a área do segmento parabólico ABC_{ps} é igual a quatro terços da área do triângulo $\triangle ABC$ inscrito na parábola.

A partir de A, desenhe-se a reta AKZ paralela a DB (ver figura 3). A reta AKZ interseta a tangente em C à curva no ponto Z, e a reta CB em K. O ponto E é o ponto de intersecção das linhas CZ e DB. Prolongamos agora a linha CK até H de forma a que CK=KH. Em seguida, consideramos um ponto O arbitrário em AC e por ele traçamos uma reta paralela a DB, que intersecta a parábola γ em P, CK em N e CZ em M.

Como ABC_{ps} é um segmento parabólico, D é o ponto médio da corda AC e DB é paralela ao eixo da parábola, temos que AC é paralela à tangente à parábola em B [esta é uma aplicação da Proposição 1 da *Quadratura da Parábola*]. Além disso, uma vez que a corda AC é paralela à tangente no ponto B, e a linha DB é paralela ao eixo da parábola e também intersecta a corda AC em D e a tangente em C no ponto E, então DB=BE [este resultado, relativo à propriedade da subtangente, é afirmado na Proposição 2 da *Quadratura da Parábola*]. Ora, dado este resultado (DB=BE) e o facto de AZ e OM serem ambos paralelos a DE, temos também que ON=NM e AK=KZ [aqui Arquimedes está a aplicar três resultados obtidos por Euclides nos *Elementos*: Proposição 4 do Livro VI e Proposições 11 e 9 do Livro V]. Ora, como $CA : AO = MO : OP$ [provado na *Quadratura da Parábola*, Proposição 5], $CA : AO = CK : KN$ [esta é uma aplicação dos *Elementos* de Euclides, Proposição 2 do Livro VI e Proposição 18 do Livro V] e CK=KH, temos que $KH : KN = MO : OP$.

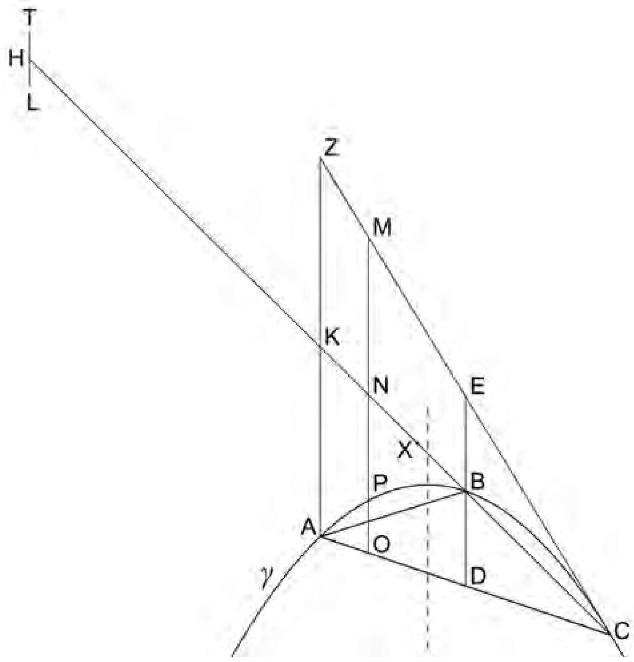

Figura 3.

Após este tratamento puramente geométrico, Arquimedes começa a apresentar considerações físicas. Mais precisamente, ele usa alguns lemas sobre centros de gravidade que menciona no início do *Método* e que foram provados no seu tratado *Sobre o Equilíbrio dos Planos*. Primeiro, ele observa que o ponto N é o centro de gravidade do segmento OM (o centro de gravidade de um segmento de reta é o seu ponto médio). Portanto, se tomarmos um segmento LT igual a OP com H como seu centro de gravidade (de modo que LH=HT), LT estará em equilíbrio com OM. De facto, utilizando a lei da alavanca, podemos observar que HN está dividido em segmentos (HK e KN) que são inversamente proporcionais aos "pesos" LT e MO, nomeadamente de tal forma que $HK : KN = MO : LT$, de modo que K é o centro de gravidade do peso combinado dos dois.

O que Arquimedes acaba de aplicar é o seu método baricêntrico. A lei da alavanca, descoberta por Arquimedes e apresentada no seu *Sobre o Equilíbrio dos Planos* (Proposições 6 e 7 do Livro I), afirma que as grandezas colocadas em lados opostos do fulcro estão em equilíbrio a distâncias inversamente proporcionais às ditas grandezas (em termos modernos: se dois corpos de massas m_1 e m_2 forem colocados nos braços de uma alavanca reta do fulcro K, e se d_1 e d_2 forem as distâncias dos centros de massa dos corpos ao fulcro, então os dois corpos equilibrar-se-ão apenas no caso em que $m_1/d_2 = m_2/d_1$). Para aplicar esta lei em geometria, Arquimedes "vê" o segmento HN como uma alavanca idealizada, de braços HK e KN, que permanece em equilíbrio sob a influência de duas grandezas. As duas grandezas em questão são os dois segmentos LT e MO, que são imaginados como pesos reais de tal forma que o segmento mais longo MO tem maior peso do que o segmento mais curto LT.

Podemos agora aplicar o resultado obtido para MO e LT, que é igual a OP, a todos os segmentos que são tomados da mesma forma de MO e OP. De facto, todos os segmentos que podem ser traçados no triângulo $\triangle AZC$ paralelos a MO estarão em equilíbrio com as suas porções cortadas pela parábola, quando transferidas para H (como fizemos para OP). K será o centro de gravidade do peso combinado de cada segmento e a sua porção.

É neste ponto do seu argumento que Arquimedes aplica o método dos indivisíveis: concebe o triângulo $\triangle AZC$ como sendo constituído por segmentos paralelos a MO no seu interior (os "indivisíveis") e, de forma semelhante, o segmento parabólico ABC_{ps} como sendo constituído por todos os segmentos paralelos a OP no seu interior (os "indivisíveis"). Estabelecida esta hipótese, podemos alargar as considerações baricêntricas ao triângulo $\triangle AZC$ e a todo o segmento parabólico ABC_{ps} transferido para H: o triângulo $\triangle AZC$ equilibrará sobre o ponto K o segmento parabólico colocado sobre H como seu centro de gravidade, de modo a que K seja o centro de gravidade comum (ver figura 4).

Depois de ter estabelecido o equilíbrio (com centro de gravidade K) entre o triângulo $\triangle AZC$ e o segmento parabólico ABC_{ps} transferido para H, Arquimedes encontra o centro de gravidade do triângulo $\triangle AZC$. Como CK é uma mediana de $\triangle AZC$, se tomarmos o ponto X em CK tal que CK=3XK, então X será o centro de gravidade de $\triangle AZC$ [Arquimedes usa aqui os seguintes resultados: o ponto de intersecção das medianas de um triângulo divide cada mediana em segmentos na razão 2:1 e, como demonstrado na Proposição 14 do Livro I de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, o ponto de intersecção das três medianas do triângulo é o centro de gravidade do triângulo].

Uma vez que existe equilíbrio entre o triângulo $\triangle AZC$ e o segmento parabólico ABC_{ps} sobre H, e o seu centro de gravidade comum é K, temos o seguinte resultado: o triângulo $\triangle AZC$ está para o segmento parabólico ABC_{ps} transferido para H como o seu centro de gravidade tal como HK está para KX (ou seja, $\triangle AZC : ABC_{ps} = HK : KX$). Agora, como HK=KC=3KX, então o triângulo $\triangle AZC$ é três vezes o segmento da parábola ABC_{ps}. Além disso, $\triangle AZC$ é quatro vezes o triângulo $\triangle ABC$, visto que ZK=KA e AD=DC [este resultado é obtido através de uma aplicação dos *Elementos* de Euclides, Proposição 1 do Livro VI]. Assim, se $\triangle AZC = 3ABC_{ps}$ e $\triangle AZC = 4\triangle ABC$, podemos concluir que

$$3\,ABC_{ps} = 4\,\triangle ABC.$$

Mostrámos assim que o segmento parabólico ABC é quatro terços do triângulo ABC.

ONDE RESIDE A FALTA DE RIGOR?

Utilizando o método dos indivisíveis e o método baricêntrico, Arquimedes deduz que o segmento parabólico é quatro terços do triângulo inscrito. No entanto, no final da sua discussão da Proposição 1, observa que o tratamento que acaba de apresentar não pode ser considerado uma "prova" do resultado. Pelo contrário, diz ele, cria "uma certa impressão" de que a conclusão é verdadeira:

> "Isto não foi, portanto, provado pelo acima exposto, mas criou-se uma certa impressão de que a conclusão é verdadeira. Uma vez que vemos assim que a conclusão não foi provada, mas supomos que é verdadeira, mencionaremos a prova geométrica publicada anteriormente, que nós mesmos encontrámos para ela, no lugar devido."
> [1, p. 318, tradução do autor]

Podemos, portanto, perguntar-nos onde, segundo Arquimedes, se encontra a falta de exatidão: no caráter mecânico

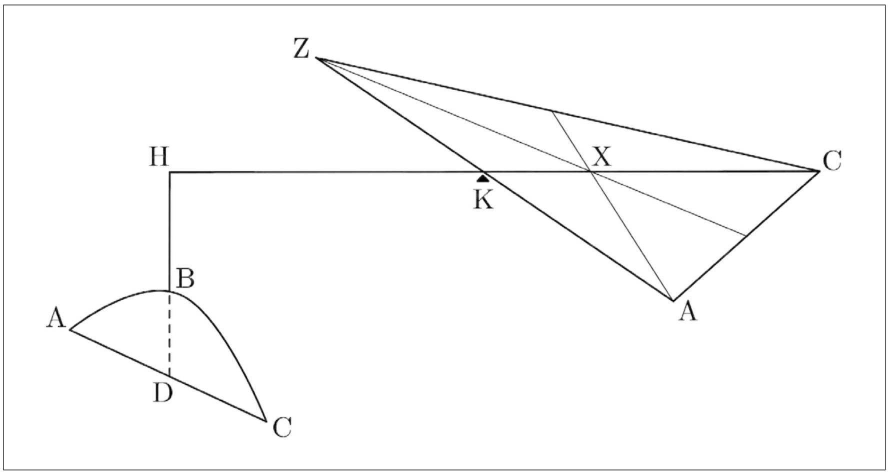

Figura 4.

do argumento, na aplicação de indivisíveis, ou em ambos? Como observado por Dijksterhuis, a deficiência matemática que Arquimedes aponta surge apenas da utilização de indivisíveis, e não da utilização de considerações mecânicas na geometria. Esta tese é apoiada por duas observações: primeiro, Arquimedes considera o método baricêntrico um instrumento legítimo a utilizar nos seus tratados formais (por exemplo, na primeira parte da *Quadratura da Parábola*, Arquimedes usa considerações mecânicas como uma ferramenta formalmente aceitável, mas substitui os indivisíveis por elementos finitos de área); em segundo lugar, no seu tratado *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Arquimedes estabelece a mecânica (estática) como uma ciência demonstrativa, e por isso é razoável pensar que ele atribui validade demonstrativa aos aspetos mecânicos do método.

A opinião de Dijksterhuis tem sido acolhida por muitos estudiosos e continua a ser dominante entre os historiadores da matemática. No entanto, ela não é unanimemente aceite. Por exemplo, Tohru Sato e Wilbur Knorr argumentaram que os matemáticos gregos consideraram válidos os argumentos que envolvem indivisíveis. Knorr, em particular, atribui a falta de rigor do método de Arquimedes à sua natureza mecânica (ver [3]). Além disso, alguns estudiosos observaram como o método baricêntrico e o método dos indivisíveis funcionam em conjunto no *Método*, de tal forma que é impossível analisá-los como duas técnicas conceptualmente independentes (ver [7, p. 22]).

Infelizmente, o debate que gira em torno do papel que Arquimedes atribuiu ao seu método no *Método* é tão multifacetado que, por razões de espaço, não pode ser aqui totalmente reproduzido. O meu modesto objetivo nesta secção final é oferecer ao leitor uma introdução a esta discussão, à qual só se pode aceder se considerarmos a forma como Arquimedes utiliza os indivisíveis e o método baricêntrico nos seus argumentos (foi por isso que descrevi todos os detalhes da Proposição 1 na secção anterior).

Arquimedes é frequentemente recordado pelo seu espetacular uso da matemática na física, o que o levou a erodir a física essencialista estabelecida por Aristóteles e a lançar as bases para o desenvolvimento de uma física matemática. O *Método* mostra que o seu génio foi ainda mais longe: aplicou a física à matemática para descobrir teoremas matemáticos (através do método baricêntrico) e utilizou uma técnica (o método dos indivisíveis) que só virá a ser "descoberta" pelos matemáticos do século XVII.

Agradecimentos: O autor deseja agradecer a Pedro Freitas pelos comentários e pela ajuda na tradução deste artigo.

REFERÊNCIAS

[1] Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*. Princeton: Princeton University Press.

[2] Giusti, E. (1980). *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*. Bologna: Edizioni Cremonese.

[3] Knorr, W. (1982). "Infinity and continuity: The interaction of mathematics and philosophy in antiquity". In Kretzmann, N., editor, *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, pages 112-45. Ithaca, NY: Cornell University Press.

[4] Knorr, W. (1996). "The method of indivisibles in ancient geometry". In Calinger, R., editor, *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, pages 67-86. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

[5] Mancosu, P. (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Oxford: Oxford University Press.

[6] Netz, R., editor (2017). *The Works of Archimedes: Translation and Commentary. Volume 2: On Spirals*. R. Netz (trans.). Cambridge: Cambridge University Press.

[7] Netz, R., Saito, K., and Tchernetska, N. (2001). "A new reading of Method proposition 14: Preliminary evidence from the Archimedes palimpsest (part 1)". *SCIAMVS*, 2:9-29.

[8] Sato, T. (1986-1987). "A reconstruction of *The Method* proposition 17, and the development of Archimedes' thought on quadrature". *Historia Scientiarum*, 31(1986): 61-86, 32(1987): 61-90.

SOBRE O AUTOR

Daniele Molinini é Investigador Principal FCT no Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa (CFCUL), onde é PI do projeto de investigação "Exploring the Weak Objectivity of Mathematical Knowledge" (n.º CEECIND/01827/2018).

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, *pjfreitas@fc.ul.pt*