

CASO LIMITE DI GRASHOF DEL QUADRILATERO ARTICOLATO PIANO E TERNE PITAGORICHE

Alessandro Rivola

Dipartimento di Ingegneria Industriale,
Università di Bologna,
via Fontanelle 40, Forlì, Italia
E-mail: alessandro.rivola@unibo.it

Abstract. Nel presente lavoro si studia un semplice problema di sintesi cinematica di un quadrilatero articolato piano. Dopo aver classificato il quadrilatero in base ai tradizionali approcci presenti in letteratura, se ne opera la sintesi cinematica e, successivamente, si trovano le soluzioni del problema di sintesi nel caso in cui le lunghezze dei membri del quadrilatero siano numeri interi (positivi), mostrando che sono correlate con le terne pitagoriche primitive. Avere a disposizione delle soluzioni con lunghezze intere consente un vantaggio non trascurabile quando si vuole procedere ad una prima sintesi di massima del meccanismo imponendo alcune proporzioni desiderate tra le lunghezze dei membri. Ciò è di un certo rilievo laddove le proporzioni e le forme costituiscono un aspetto rilevante, come ad esempio nel campo dell'interior design o del design in generale.

Keywords: quadrilatero articolato, sintesi cinematica, Grashof, terne pitagoriche

1. INTRODUZIONE

Si consideri un quadrilatero in grado di assumere le due posizioni *aperta* e *chiusa* mostrate rispettivamente in Fig. (1a) e in Fig. (1c). Tale meccanismo è in grado di far compiere alla biella (il membro opposto al telaio) una rotazione di 90 gradi in senso orario nel passaggio dalla configurazione *aperta* a quella *chiusa* e può essere utile, ad esempio, per movimentare oggetti come panche o ribaltine che, rese solidali alla biella, nella posizione *chiusa* verrebbero ad adagiarsi lungo la parete verticale (lato A_0B_0). In posizione *chiusa* l'oggetto così movimentato rivolgerebbe verso l'esterno la superficie che in posizione *aperta* è rivolta verso l'alto, aspetto di un certo interesse in determinati campi applicativi come ad esempio l'*interior design*, dove il lato estetico riveste un ruolo rilevante.

Le lunghezze dei membri sono indicate con l_k ($k = 1, \dots, 4$). In particolare: l_4 è la lunghezza A_0B_0 del telaio, l_1 è la lunghezza A_0A dell'asta superiore, l_2 è la lunghezza AB della biella (il membro opposto al telaio) ed, infine, l_3 è la lunghezza B_0B dell'asta inferiore.

La presente memoria è così articolata: nella Sezione 2 si classifica il quadrilatero secondo i tradizionali approcci presenti in letteratura; la Sezione 3 è dedicata alla sintesi cinematica del meccanismo condotta in alcuni casi in cui il problema ha un numero di soluzioni finito; la

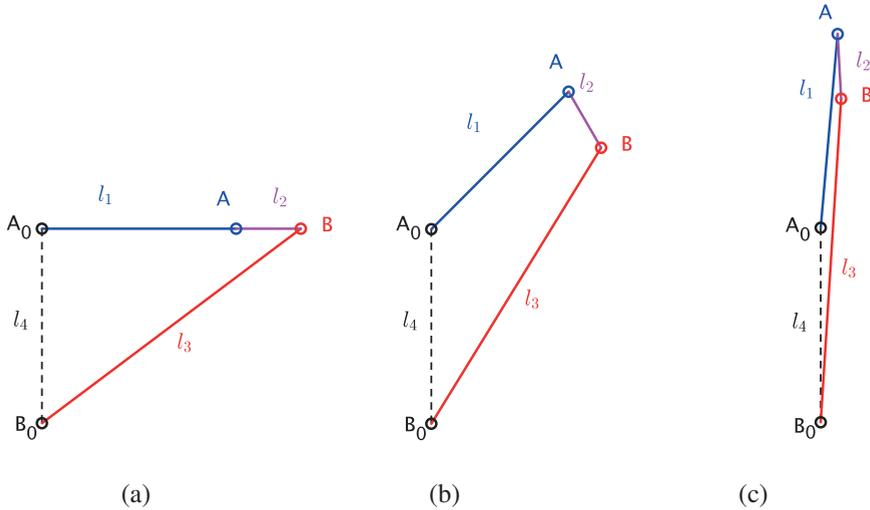


Figura 1. Quadrilatero articolato:
 a) posizione *aperta*; b) posizione *intermedia*; c) posizione *chiusa*.

Sezione 4 considera il caso particolare in cui le lunghezze dei membri del quadrilatero siano numeri interi (positivi). Infine, si tracciano le conclusioni.

2. CLASSIFICAZIONE DEL MECCANISMO

Volendo classificare il quadrilatero, poiché nella disposizione *aperta* (Fig. (1a)) il membro B_0B si presenta come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, è sicuramente quello di lunghezza maggiore (lunghezza l_3). Di conseguenza, la *biella* AB , la cui lunghezza l_2 viene a sommarsi ad l_3 nella disposizione *chiusa* (Fig. (1c)), è sicuramente il membro di lunghezza minore. Risulta naturalmente soddisfatta l'uguaglianza:

$$l_3 + l_2 = l_4 + l_1 \quad (1)$$

che, se si indica con l la lunghezza del membro più lungo, con s quella del membro più corto e con p e q le lunghezze intermedie, viene a coincidere con la:

$$l + s = p + q \quad (2)$$

nota come *caso limite di Grashof* [1].

Si tratta di una categoria limite tra i quadrilateri di *Grashof* e quelli *non-Grashof*, che vede tutti i membri raggiungere una posizione in cui sono allineati.

Tale configurazione è nota come *change point* ed il quadrilatero viene così ad appartenere alla categoria dei *change-point mechanisms* [1–4]. Al *change point* il moto è cinematicamente indeterminato. In [5] la stessa categoria è definita come *special-case Grashof kinematic chains*, in accordo con [6] in cui è definita *transition linkages or Grashof neutral linkages*. La medesima tipologia di meccanismi è inoltre definita come *folding linkages* (meccanismi “pieghevoli” o “richiudibili”) da [7, 8].

Oltre a ricadere nel *caso limite di Grashof*, il quadrilatero in esame ha la *biella* come lato più corto, come sopra evidenziato. Secondo [9], dal momento che si tratta di un *change-point mechanism* avente la *biella* come lato più corto, il quadrilatero risulta appartenere alla categoria no. 11 (tra le 14 individuate in [9]) denominata *change point rocker-crank-rocker (CPRCR)*, ossia si tratta di un quadrilatero con due *bilancieri* (le aste di lunghezza l_1 e l_3), in cui la *biella* è in grado di compiere una rotazione completa.

Tornando alla classificazione dei quadrilateri articolati piani, in [7, 8] è presentata una alternativa alla formulazione di *Grashof* che non richiede di identificare chi, tra i membri del quadrilatero, sia il più lungo e il più corto. La classificazione introduce tre parametri (T_1, T_2, T_3), la cui combinazione di segni identifica otto tipologie di quadrilateri: quattro sono di *Grashof* ($T_1 T_2 T_3 > 0$) e quattro *non-Grashof* ($T_1 T_2 T_3 < 0$). Se uno qualunque dei parametri T_1, T_2 o T_3 si annulla, allora si cade nel *caso limite di Grashof* e il meccanismo può assumere una configurazione in cui tutti i membri sono tra loro allineati, cioè risulta “pieghevole” o “richiudibile” (*folding linkage*).

Considerando tutte le possibili combinazioni di segno o di valore nullo di T_1, T_2 e T_3 , risultano 27 tipologie di quadrilateri, di cui 19 sono *folding linkages*.

Inoltre, il numero di parametri T_i nulli definisce il numero di configurazioni con cui si può “richiudere” il meccanismo. Nel caso in esame, la definizione dei parametri T_i conduce a (si veda [7, 8]):

$$\begin{aligned} T_1 &= l_4 - l_1 + l_2 - l_3 \\ T_2 &= l_4 - l_1 - l_2 + l_3 \\ T_3 &= l_2 + l_3 - l_4 - l_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Poiché, come già evidenziato, l’asta inferiore B_0B (di lunghezza l_3) è quella più lunga e vale la Eq. (1), è facile rendersi conto che:

$$T_1 < 0 \quad T_2 > 0 \quad T_3 = 0 \quad (4)$$

cioè, il meccanismo in esame si può richiudere solo nella configurazione di Fig. (1c), in cui il membro più lungo e quello più corto sono adiacenti e distesi.

3. SINTESI DEL MECCANISMO

Per la sintesi di un quadrilatero in grado di assumere le due posizioni estreme (a e c) di Fig. (1), occorre soddisfare le seguenti:

$$\begin{cases} l_4^2 + (l_1 + l_2)^2 = l_3^2 \\ l_2 + l_3 = l_1 + l_4 \end{cases} \quad (5)$$

che risultano determinate una volta note due delle quattro lunghezze.

La coppia di dati può variare a seconda delle esigenze progettuali. Per fissare le idee, si supponga che sia imposta la lunghezza l_4 del telaio A_0B_0 .

Se si assumono come parametri di progetto le lunghezze l_2 e l_4 (che devono ovviamente essere positive), l_1 e l_3 si ricavano dalle Eqn. (5) e risulta:

$$l_1 = \frac{l_2 l_4}{l_4 - 2l_2} \quad l_3 = \frac{l_4^2 - 2l_2 l_4 + 2l_2^2}{l_4 - 2l_2} \quad (6)$$

Le Eqn. (6) forniscono valori di l_1 e l_3 positivi a patto che sia:

$$l_4 > 2l_2 \quad (l_2 > 0, l_4 > 0) \quad (7)$$

Infatti, essendo $l_2 > 0$ e $l_4 > 0$, lo è anche il loro prodotto, cioè il numeratore di l_1 . Dovendo essere $l_1 > 0$ deve quindi esserlo anche il suo denominatore, ossia deve valere la Eqn. (7). Analogamente, valendo la Eqn. (7), affinché l_3 sia positivo deve esserlo anche il suo numeratore, il quale lo è sempre poiché per qualunque valore reale di l_2 si tratta di un trinomio di secondo grado irriducibile¹. In definitiva, la Eqn. (7) è condizione sufficiente per assicurare un valore positivo alle lunghezze l_1 e l_3 .

Se invece si assumono le lunghezze l_3 e l_4 come parametri di progetto, dalle Eqn. (5) si ricavano l_1 e l_2 . Ponendo $L = l_1 + l_2$ (L è la lunghezza del cateto A_0B del triangolo rettangolo di Fig. (1a)), risulta:

$$L = \sqrt{l_3^2 - l_4^2} \quad (8)$$

e:

$$l_1 = \frac{L + l_3 - l_4}{2} \quad l_2 = \frac{L - l_3 + l_4}{2} \quad (9)$$

Le lunghezze L , l_1 e l_2 risultano tutte positive, a patto che sia:

$$l_3 > l_4 \quad (l_3 > 0, l_4 > 0) \quad (10)$$

D'altra parte, come più volte evidenziato, il membro più lungo del quadrilatero è quello di lunghezza l_3 e pertanto si avrà cura di assicurare la Eqn. (10) nella definizione dei dati di progetto. La Eqn. (10) assicura che sia $L > 0$. Inoltre, poiché $L > 0$ e $l_3 - l_4 > 0$, certamente $l_1 > 0$. Infine, l_2 è senza dubbio positivo dal momento che vale certamente la *disuguaglianza triangolare* $l_3 < L + l_4$ poiché L , l_4 e l_3 sono le lunghezze dei tre lati di un triangolo (con l_3 maggiore di L e l_4).

Infine, se si assumono le lunghezze l_1 e l_4 come parametri di progetto, dalle Eqn. (5) si ricavano le lunghezze l_2 e l_3 :

$$l_2 = \frac{l_1 l_4}{2l_1 + l_4} \quad l_3 = \frac{(l_1 + l_4)^2 + l_1^2}{2l_1 + l_4} \quad (11)$$

le quali sono senz'altro positive per $l_1 > 0$ e $l_4 > 0$.

4. TERNE PITAGORICHE

Si consideri ora il caso in cui la lunghezza l_k ($k = 1, \dots, 4$) delle aste sia un numero intero (ovviamente positivo). Ottenere delle soluzioni con lunghezze intere consente di poter operare una prima sintesi di massima del meccanismo imponendo alcune proporzioni desiderate tra le lunghezze dei membri, cosa piuttosto utile in determinati campi applicativi, quando le proporzioni e le forme costituiscono un aspetto rilevante, come ad esempio nell'*interior design* o nel *design* in generale.

¹Per qualunque valore di l_2 (o di l_4) l'equazione di secondo grado $l_4^2 - 2l_2 l_4 + 2l_2^2 = 0$ ha discriminante negativo e pertanto il trinomio ha il segno del coefficiente del termine di secondo grado, vale a dire è positivo.

l_2	l_4	L	l_3	l_1
1	3	4	5	3
1	4	3	5	2
2	5	12	13	10
2	6	8	10	6
2	8	6	10	4
2	12	5	13	3
3	7	24	25	21
3	8	15	17	12
3	9	12	15	9
3	12	9	15	6
3	15	8	17	5
3	24	7	25	4
4	9	40	41	36
4	10	24	26	20
4	12	16	20	12
4	16	12	20	8
4	24	10	26	6
4	40	9	41	5

Tabella 1. Soluzioni delle Eqn. (5) per valori interi positivi delle lunghezze l_k ($k = 1, \dots, 4$): valori della lunghezza del lato più corto (la *biella*) pari a $l_2 = 1, \dots, 4$. I valori delle tre colonne $\{l_4, L, l_3\}$ costituiscono *terne pitagoriche*.

Avendo posto $L = l_1 + l_2$, i tre valori $\{l_4, L, l_3\}$ costituiscono certamente una *terna pitagorica*, dal momento che la prima delle Eqn. (5) diventa *diofantea*² ed assume la forma *pitagorica* [10, 11]:

$$l_4^2 + L^2 = l_3^2 \quad (12)$$

La Tab. (1) riporta le soluzioni del problema definito dalle Eqn. (5) impiegando le Eqn. (6), per valori della lunghezza del lato più corto (la *biella*) pari a $l_2 = 1, \dots, 4$. I valori $\{l_4, L, l_3\}$ delle tre colonne centrali costituiscono *terne pitagoriche*.

La Tab. (2) riporta le soluzioni limitando la lunghezza del membro più lungo a valori $l_3 < 100$ e considerando solo le *terne pitagoriche primitive* [10], ossia quelle in cui non esiste un divisore comune di $\{l_4, L, l_3\}$. Inoltre, ad ulteriore compattazione, nella Tab. (2) si sono escluse le soluzioni in cui i valori delle colonne l_4 ed L risultano interscambiabili (cosa del tutto lecita in quanto si tratta dei due cateti del triangolo pitagorico).

Le soluzioni riportate in Tab. (2) sono 16, cioè proprio pari al numero di *terne pitagoriche primitive* esistenti in cui il terzo valore (l'ipotenusa) è < 100 [12]. In altre parole, si è giunti alla conclusione che tutte le *terne pitagoriche primitive* esistenti in cui il terzo valore è < 100 consentono di soddisfare il problema definito dalle (5), nel caso in cui la lunghezza l_k ($k = 1, \dots, 4$) delle aste sia un numero intero positivo.

Tale conclusione è valida per tutte le *terne pitagoriche primitive* esistenti. Per dimostrarlo, occorre provare che, data una qualunque *terna pitagorica primitiva* $\{l_4, L, l_3\}$ in cui $L =$

²Una equazione si dice *diofantea* se deve essere risolta mediante numeri interi [10].

l_2	l_4	L	l_3	l_1
1	3	4	5	3
2	5	12	13	10
3	7	24	25	21
3	8	15	17	12
4	9	40	41	36
5	11	60	61	55
5	12	35	37	30
6	13	84	85	78
6	20	21	29	15
7	16	63	65	56
10	28	45	53	35
12	33	56	65	44
14	36	77	85	63
15	39	80	89	65
15	48	55	73	40
20	65	72	97	52

Tabella 2. Soluzioni delle Eqn. (5) per valori interi positivi delle lunghezze l_k ($k = 1, \dots, 4$) con $l_3 < 100$. I valori di $\{l_4, L, l_3\}$ costituiscono tutte le 16 *terne pitagoriche primitive* in cui $l_3 < 100$.

$l_1 + l_2$, vale a dire una terna che soddisfa la prima delle Eqn. (5), esistono sempre due interi positivi l_1 e l_2 che soddisfano anche la seconda delle Eqn. (5).

La dimostrazione risiede nel fatto che tutte le *terne pitagoriche primitive* si possono ottenere da una qualunque coppia di interi positivi *coprimi*³, $m > n$, e di diversa parità, tali per cui (secondo le formule di Euclide) [10]:

$$l_4 = m^2 - n^2; \quad L = 2mn; \quad l_3 = m^2 + n^2 \quad (13)$$

Infatti, introducendo le:

$$l_2 = L - l_1 \quad l_1 = L - l_2 \quad (14)$$

nella seconda delle Eqn. (5) si ottengono nuovamente le Eqn. (9) che, in base alle Eqn. (13) conducono alle:

$$l_1 = n(m + n) \quad l_2 = n(m - n) \quad (15)$$

Dalle Eqn. (15), essendo m e n interi positivi con $m > n$, si vede chiaramente che l_1 e l_2 sono a loro volta numeri interi positivi. Si è quindi dimostrato che tutte le *terne pitagoriche primitive* esistenti consentono di soddisfare il problema definito dalle Eqn. (5) nel caso in cui la lunghezza l_k ($k = 1, \dots, 4$) delle aste sia un numero intero positivo.

³Due numeri m e n si dicono *coprimi* (o primi tra loro o relativamente primi) se e solo se essi non hanno nessun divisore comune eccetto 1 e -1 o, in modo equivalente, se il loro massimo comune divisore è 1.

5. CONCLUSIONI

Si è partiti da un semplice problema di sintesi cinematica di un quadrilatero articolato piano che deve assumere le due posizioni *aperta* e *chiusa* mostrate rispettivamente in Fig. (1a) e in Fig. (1c).

Dopo aver classificato il quadrilatero in base ai tradizionali approcci presenti in letteratura, se ne è operata la sintesi cinematica in alcuni casi in cui il problema risulta determinato, ossia quando sono note due delle quattro lunghezze dei membri.

Successivamente, si sono trovate le soluzioni del problema di sintesi nel caso in cui le lunghezze dei membri del quadrilatero siano numeri interi (positivi), mostrando che le soluzioni sono fornite da tutte le *terne pitagoriche primitive* $\{l_4, L, l_3\}$ (con $L = l_1 + l_2$).

In definitiva, come ausilio per la sintesi di quadrilateri che debbano compiere il movimento illustrato in Fig. (1), si può impiegare la Tab. 2, tenendo conto che è possibile scambiare i valori l_4 ed L . Ovviamente, scambiando i valori di l_4 e L , si modifica di conseguenza il valore di l_1 , essendo $l_1 = L - l_2$. Più in generale, data una qualunque *terna pitagorica primitiva* $\{l_4, L, l_3\}$, anche tra quelle in cui $l_3 > 100$ (non comprese in Tab. 2), i valori dei lati l_1 e l_2 si trovano rispettivamente impiegando le Eqn. (9) e $l_2 = L - l_1$.

Naturalmente, il movimento tra le posizioni estreme (*a* e *c*) di Fig. (1) può essere realizzato anche applicando un fattore di scala alla lunghezza di ogni lato del quadrilatero così ottenuto.

Avere a disposizione delle soluzioni con lunghezze intere consente un vantaggio non trascurabile dal momento che si può procedere ad una prima sintesi di massima del meccanismo imponendo alcune proporzioni desiderate tra le lunghezze dei membri. Ciò è rilevante laddove le proporzioni e le forme costituiscono un aspetto rilevante, come ad esempio nel campo dell'*interior design* o del *design* in generale.

Ringraziamenti

Si ringrazia l'architetto Nicola Golfari per aver stimolato lo studio del problema e per le interessanti discussioni.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Grashof, F., 1890. *Theoretische maschinenlehre*, Vol. 3. L. Voss.
- [2] Hartenberg, R. S., and Denavit, J., 1964. *Kinematic synthesis of linkages*. McGraw-Hill.
- [3] Paul, B., 1979. "A reassessment of Grashof's criterion". *Journal of Mechanical Design*, **101**(3), pp. 515–518.
- [4] Erdman, A. G., Sandor, G. N., and Kota, S., 1984. *Mechanism design: analysis and synthesis*. Prentice-Hall Englewood Cliffs.
- [5] Norton, R. L., and Wang, S. S.-L., 2004. *Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines*. McGraw-Hill Higher Education.
- [6] Waldron, K. J., Kinzel, G. L., and Agrawal, S. K., 2016. *Kinematics, dynamics, and design of machinery*. John Wiley & Sons, New York.
- [7] Murray, A., and Larochelle, P., 1998. "A classification scheme for planar 4R, spherical 4R, and spatial RCCC linkages to facilitate computer animation". *ASME Paper No. DETC98/MECH-5887*.
- [8] McCarthy, J. M., and Soh, G. S., 2010. *Geometric design of linkages*, 2nd ed., Vol. 11. Springer Science & Business Media.

- [9] Barker, C. R., 1985. "A complete classification of planar four-bar linkages". *Mechanism and Machine Theory*, **20**(6), pp. 535–554.
- [10] Sierpinski, W., 1988. *Elementary Theory of Numbers: Second English Edition (edited by A. Schinzel)*, Vol. 31. Elsevier.
- [11] Sierpinski, W., 1962. *Pythagorean triangles*, Vol. 9 of *The Scripta Mathematica Studies*. Yeshiva Univ., New York.
- [12] Lehmer, D. N., 1900. *Asymptotic evaluation of certain totient sums*. University of Chicago.