Italiano a scuola, 3 (2021), pp. 133-184
https://doi.org/10.6092/issn.2704-8128/13083

https://italianoascuola.unibo.it
ISSN 2704-8128

Il ruolo del testo nell'interdisciplinarità tra matematica, fisica ed educazione linguistica: il tema del moto parabolico tra testi storici e manuali di fisica per la scuola secondaria di secondo grado

Veronica Bagaglini, Laura Branchetti, Alessandro Gombi, Olivia Levrini, Sara Satanassi, Matteo Viale*

The role of the text in the interdisciplinarity between mathematics, physics and language education: the theme of parabolic motion between historical texts and Physics textbooks for secondary school

Starting from the case of parabolic motion, this contribution proposes a comparison and analysis of a historical text, some high school physics textbooks and one university textbook, from mathematical, physical, and linguistic points of view. The analysis shows how school textbooks, marked by disciplinary autonomy, have lost the intrinsic interdisciplinary dimension of historical texts. The university textbook is a synthesis of and a compromise between these divergent approaches. The results of the analysis represent a first starting point for the planning of targeted educational interventions and an important step to achieve interdisciplinarity in the school context between language education and science subjects.

A partire dal caso del moto parabolico, questo contributo propone un confronto e l'analisi da un punto di vista matematico, fisico e linguistico rispettivamente di un testo storico, di alcuni manuali di fisica per i Licei e di un manuale universitario. Dall'analisi emerge come i manuali scolastici, improntati a un'autonomia disciplinare, smarriscano la dimensione interdisciplinare intrinseca dei testi galileiani. Il manuale universitario si pone quale sintesi e compromesso tra approcci divergenti. I risultati dell'analisi rappresentano un primo spunto per la progettazione futura di interventi didattici mirati e un passaggio importante per realizzare l'interdisciplinarità nel contesto scolastico.

VERONICA BAGAGLINI (veronica.bagaglini@unibo.it) è assegnista di ricerca di Linguistica italiana presso il Dipartimento di Filologia Classica e Italianistica dell'Università di Bologna e collabora al progetto *IDENTITIES - Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to Interdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges.*

LAURA BRANCHETTI (laura.branchetti@unimi.it), matematica, è ricercatrice di Matematiche complementari presso il Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques" dell'Università degli Studi di Milano ed è membro del progetto *IDENTITIES - Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to Interdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges*.

ALESSANDRO GOMBI (alessandro.gombi@studio.unibo.it) è laureato magistrale in Phisics all'Università di Bologna con una tesi di Didattica della fisica. Collabora con il progetto *IDENTITIES - Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to Interdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges*.

OLIVIA LEVRINI (olivia.levrini2@unibo.it), fisica, insegna Didattica della fisica e Storia della fisica presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi" dell'Università di Bologna. È coordinatrice del progetto *IDENTITIES - Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to Interdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges*.

SARA SATANASSI (sara.satanassi3@unibo.it), fisica, è dottoranda di Didattica della Fisica presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi" dell'Università di Bologna e collabora al progetto *IDENTITIES - Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to Interdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges*.

MATTEO VIALE (matteo.viale@unibo.it), linguista, insegna Didattica della lingua italiana presso il Dipartimento di Filologia Classica e Italianistica dell'Università di Bologna. È membro e referente per la parte di linguistica nel progetto *IDENTITIES - Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to Interdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges*.

* Questo contributo nasce nell'ambito delle attività del Progetto Europeo Erasmus+ *IDENTITIES - Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to InTerdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges* (https://identitiesproject.eu/), coordinato dal Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Bologna, che vede anche la partecipazione del Dipartimento di Filologia Classica e Italianistica dell'Università di Bologna e del Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche dell'Università di Parma; la partnership include anche le Università di Montpellier, Barcellona e Creta. Il progetto ha lo scopo di esplorare le forme di conoscenza interdisciplinare tra matematica, fisica e aspetti linguistici sia in temi STEM avanzati (cambiamenti climatici, intelligenza artificiale, tecnologie quantistiche) sia in argomenti interdisciplinari curricolari (crittografia, parabola e moto dei proiettili, geometria non euclidea e gravitazione).

1. Introduzione

Oggi più che mai è forte la richiesta di una preparazione interdisciplinare degli studenti, che superi i rigidi confini tra le discipline. Interdisciplinarità è una parola chiave che appare, spesso con significati diversi, in molti contesti istituzionali ed educativi, nelle raccomandazioni dei decisori politici e nei bandi per la ricerca in ambito a livello europeo in materia educativa, a livello nazionale e internazionale. Tale richiesta è ribadita anche nelle *Indicazioni nazionali per i Licei* (MIUR 2010), sia nella sezione relativa al profilo culturale e professionale degli studenti, sia nei traguardi e gli obiettivi per l'insegnamento e apprendimento della matematica e della fisica. L'interdisciplinarità tra scienza, matematica e tecnologia caratterizza profondamente tanto l'evoluzione storica della matematica e della fisica (Tzanakis 2016), quanto la ricerca attuale.

In questo articolo presentiamo un lavoro di ricerca che mira a dare un contributo da un lato al dialogo tra matematica e fisica nel contesto istituzionale della scuola secondaria, in particolare del Liceo scientifico, e dall'altro al ruolo dell'analisi linguistica in ottica interdisciplinare.

I testi, come particolari e privilegiate forme di presentazione dei saperi, possono diventare strumenti didattici importanti coi quali rendere espliciti e visibili i nodi epistemologici essenziali alla formazione delle discipline, chiarendo le loro mutue relazioni. Ci soffermeremo sull'analisi di un testo storico e di alcuni manuali di fisica, con l'obiettivo di analizzare i diversi approcci all'interdisciplinarità nei testi, in particolare sulle parti relative al moto parabolico.

Si tratta dunque di un'analisi comparativa tra testi, che offre i primi spunti per la progettazione futura di interventi didattici mirati e rappresenta un passaggio importante per realizzare percorsi interdisciplinari nel contesto scolastico.

Nel paragrafo 2 è descritto l'inquadramento teorico della ricerca; nel paragrafo 3 viene presentata la metodologia utilizzata per l'analisi dei testi; i paragrafi 4, 5 e 6 propongono l'analisi da un punto di vista matematico, fisico e linguistico rispettivamente di un testo storico, di alcuni manuali di fisica per i Licei e di un manuale universitario, visto come ponte tra l'approccio dei testi storici e manualistica scolastica. Nel paragrafo 7 si propongono alcune riflessioni e si prospettano linee di approfondimento future.

2. Inquadramento teorico della ricerca

2.1. L'interdisciplinarità tra matematica e fisica nella storia e nella didattica

Secondo la definizione di Frodeman, Klein e Pacheco (2017: 16), parliamo di *interdisciplinarità* quando le discipline si integrano, interagiscono e si fondono reciprocamente; consideriamo invece *multidisciplinare* un approccio in cui le discipline sono giustapposte, sequenziali e coordinate, mentre si definisce *transdisciplinare* un approccio che va "oltre le discipline", portando a nuove identità e nuove epistemologie, in cui tendono a scomparire le identità disciplinari.

In questo lavoro ci concentreremo sull'interdisciplinarità. Tenere conto della coevoluzione della matematica e della fisica è una delle possibili prospettive sul tema e ha grandi potenzialità dal punto di vista didattico in entrambe le discipline. Infatti, come sostiene Tzanakis (2016), la separazione tra queste due discipline tipica della scuola porta a banalizzare enormemente la loro relazione: vuole che la matematica sia strumento per la fisica e la fisica sia contesto di applicazione della matematica. Questa relazione non è però presente, se non molto raramente, nella storia delle due discipline e non si ritrova in nessuno dei momenti storici fondamentali in cui le due discipline hanno visto le fasi più creative e significative della loro evoluzione. Per superare una dicotomia forzata, che a causa della sua artificiosità rende spesso la ricostruzione dei concetti in prospettiva didattica povera di significato, ripartire dalla storia e dall'epistemologia delle due discipline può avere un'enorme valenza didattica. La scelta di tale approccio non è solo orientata al ripensamento della didattica in prospettiva interdisciplinare, ma fa da pungolo anche per ripensare in parte le didattiche disciplinari, che sono basate su trasposizioni didattiche dei saperi (Chevallard 1985) che spesso portano a trasformare notevolmente le epistemologie disciplinari. Come sottolineato da Speranza (1997) e molti autori che si sono ispirati alle sue riflessioni epistemologiche (si veda ad esempio D'Amore 2003), le ricostruzioni dei saperi in prospettiva didattica risentono notevolmente delle assunzioni, spesso implicite, relative alla natura delle discipline. Fa dunque la differenza pensare alla matematica e alla fisica come discipline con uno statuto epistemologico proprio, completamente indipendente, che si sviluppano a partire da problemi interni e che possono essere del tutto giustificate utilizzando logiche interne, oppure come forme di sapere che hanno relazioni e differenze, che sono profondamente intrecciate e che coevolvono, usando una terminologia presa in prestito da Tzanakis, generando a vicenda nuovi problemi che portano gli scienziati e i matematici (terminologia a sua volta figlia di una separazione dei saperi) a permeare i labili confini tra esse per generare nuovo sapere. Si può dunque pensare che le discipline esistano come strutture di sapere indipendenti, organizzate a seguito di una trasposizione didattica disciplinare in modo da renderle comunicabili agli studenti, e che la relazione di dialogo e connessione tra esse vada costruita artificialmente a partire dal sapere già trasposto, oppure si può pensare di partire dal sapere già ricco di connessioni interdisciplinari, presente in alcuni testi storici, e operare una trasposizione didattica interdisciplinare, che mostri gli aspetti rilevanti delle due discipline da un punto di vista storico ed epistemologico e le loro connessioni.

I due approcci sono possibili ed entrambi presentano potenzialità e criticità; la letteratura di ricerca in didattica della fisica ha però messo in evidenza i limiti del paradigma strumentale criticato da Tzanakis (2016), che soggiace alla ricerca di connessioni tra le discipline ragionando in termini di applicazione/contestualizzazione a partire dai saperi disciplinari già trasposti seguendo solo logiche di ricostruzione disciplinare interne alle discipline, come sottolineato ad esempio nei numerosi articoli presentati nel fascicolo speciale della rivista *Science and education* curato da Karam (2015). La concezione dell'interdisciplinarità che vuole la matematica come strumento per la fisica e la fisica come contesto per la matematica non permette di vedere le tante sfumature intermedie e soprattutto non permette di cogliere il fondamentale ruolo strutturale della matematica in fisica: la matematica e la fisica condividono strutture di ragionamento, strumenti di modellizzazione, concetti e non si può pensare di formulare prima problemi in fisica e poi usare la matematica per risolverli senza ridurre enormemente la complessità dei problemi fino a rendere sostanzialmente impossibile la ricostruzione di intere parti della storia della scienza e della matematica.

Nelle *Indicazioni nazionali per i Licei*, nella parte dedicata alla matematica, sono tenute in grande considerazione le relazioni autentiche della matematica con la fisica e si specifica anche che il Seicento è un periodo chiave per lo sviluppo della scienza moderna e per tale ragione si richiede ai docenti di diverse discipline uno sforzo per affrontarlo in prospettiva interdisciplinare. Viene inoltre data grande importanza alla contestualizzazione storica. Assumendo questa prospettiva, una trasposizione didattica interdisciplinare che parta dai saperi esposti nei testi storici e ragioni solo *a posteriori* sul riconoscimento dei concetti e dei temi epistemologici in essi presenti che richiamano le identità disciplinari, senza contrapposizione tra matematica e fisica, valorizzando le specificità, le analogie e il loro intreccio, appare fondata dal punto di vista della ricerca didattica in entrambe le discipline e in linea con le richieste ministeriali.

2.2. Saperi istituzionalizzati e saperi contestualizzati: il ruolo della storia

Una volta chiarita la prospettiva storica e interdisciplinare dentro la quale si colloca il presente lavoro e la rilevanza epistemologica di tale approccio, nel momento in cui si passa alla riflessione sulla trasposizione didattica (Chevallard 1985) emergono numerose difficoltà di natura istituzionale, nonostante la coerenza di questo approccio con l'orientamento presentato nelle *Indicazioni nazionali per i Licei*.

Il sapere è tuttora organizzato in discipline dentro le istituzioni scolastiche e strumenti importanti per gli insegnanti sono i manuali. Essi però sono solitamente pensati in un'ottica strettamente disciplinare: l'eventuale riferimento ad altre discipline rimane spesso solo strumentale, uno strumento di mera applicazione, come vedremo in seguito. Il ricorso a fonti storiche può avere, in questa prospettiva, un ruolo importante: mostrare i saperi nella loro autenticità, ripartendo dalla nascita dei concetti e delle strutture alla base delle argomentazioni che hanno portato alla loro strutturazione, e fornire un'immagine delle reciproche relazioni tra elementi di conoscenza che oggi sono organizzati nelle discipline e che, nella loro collocazione moderna (sia in ambito scolastico, che universitario, che di ricerca), potrebbero risultare sconnessi. In questo senso il caso del moto parabolico è emblematico, come sarà mostrato nel corso del contributo.

D'altra parte l'uso della storia in classe non è di banale attuazione: molti studi a livello nazionale e internazionale hanno mostrato il potenziale dell'uso della storia della matematica in classe: si possono segnalare alcuni contributi notevoli, come Fauvel 1991, Furinghetti 1997 e Jankvist 2009, che sono solo alcuni tra i tanti lavori di riflessione e ricerca sul tema. In generale, la storia della matematica offre alla didattica alcune importanti possibilità, da un approccio aneddotico che può influenzare positivamente la motivazione degli studenti agli spunti per una riflessione metacognitiva. Inoltre, adottando una prospettiva in cui lo sviluppo storico-culturale di un'idea matematica gioca un ruolo importante nella formazione degli studenti, la storia è essenziale per spiegare cosa può influenzare la nascita o la diffusione di un'idea matematica. Come sottolinea D'Amore (2012), infatti, l'uso della storia nella didattica è strettamente intrecciato con le questioni epistemologiche.

Ci sono però anche inevitabili difficoltà nell'uso della storia come strumento didattico e, soprattutto, tale approccio comporta necessariamente un grande lavoro di riflessione e ricostruzione. La presentazione di un concetto attraverso la sua evoluzione storica richiede l'assunzione di posizioni epistemologiche impegnative e grande consapevolezza: come sottolinea D'Amore (2012: 12), rifacendosi a eminenti studiosi quali Radford, Boero e Vasco, «la stessa selezione dei dati storici non è neutra [...] problemi notevoli sono inoltre connessi alla loro interpretazione, inevitabilmente condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali». L'autore sottolinea che un termine chiave, che spesso viene liquidato senza troppe riflessioni, è quello di *conoscenza istituzionalizzata*: la si può intendere come «l'ultima versione, dal punto di vista cronologico, del sapere considerato, dunque la sua più recente forma accettata dalla comunità scientifica: da ciò segue che l'istituzionalizzazione alla quale facciamo riferimento viene a essere fortemente contestualizzata dal punto di vista storico» (D'Amore 2012: 21). L'autore prosegue sottolineando che «a questo punto entra però in gioco la componente storica: è infatti rarissimo (o forse impossibile) che una conoscenza matematica nasca da un'idea assolutamente nuova, priva di connessioni con l'esperienza del passato: per molti versi una conoscenza incorpora in sé stessa le proprie radici storiche. Quale rapporto collega la conoscenza istituzionalizzata alla propria storia?» (D'Amore 2012: 21).

Questo apre una ulteriore riflessione, assai complessa, che si basa sulla domanda sul modo in cui la struttura storica di una conoscenza matematica possa influenzare la didattica. Gli aspetti che secondo l'autore bisogna indagare sono i seguenti: le modalità attraverso cui versioni diverse della conoscenza, sviluppate in contesti storico-culturali diversi, si ritrovano nell'attuale conoscenza istituzionalizzata; quali visioni della disciplina le caratterizzano da un punto di vista epistemologico; la storia della disciplina.

Per quanto riguarda l'ultimo aspetto, rifacendosi a Gadamer (1975), D'Amore (2012) sottolinea come si possano adottare due prospettive sostanzialmente complementari alla ricostruzione dei saperi tenendo conto dell'evoluzione storica: quella della contestualizzazione, secondo cui il sapere viene presentato rispettando la versione originale in termini di criteri di rigore, problemi affrontati, linguaggio, relazione con altri aspetti della conoscenza, secondo gli usi dell'epoca; quella dell'attualizzazione, che rivisita i saperi presentati nei testi originali adattandoli al contesto attuale e riformulando con gli strumenti e secondo i criteri di rigore attuali.

Come l'autore spiega, le due visioni si basano su assunzioni epistemologiche impegnative e radicali: una visione solo attualizzata ha vantaggi rispetto a una didattica che cerca di ricapitolare l'evoluzione storica, che sarebbe anche discutibile dal punto di vista fondazionale; d'altra parte «la scelta di una storia "interna", di uno sviluppo isolato della matematica, appare problematica e difficilmente sostenibile dal punto di vista epistemologico» (D'Amore 2012: 13), dunque la presentazione di elementi storici con riferimento al proprio contesto socio-culturale ha un suo valore dal punto di vista didattico.

In questo contributo useremo questa distinzione arricchendola di un'ulteriore problematizzazione: nell'attualizzazione di saperi riportati nei testi storici in prospettiva didattica per la scuola secondaria, infatti, non si tratta solo di adattare e riformulare problemi disciplinari, ma anche di capire come ricostruire i saperi passando da una prospettiva interdisciplinare a una disciplinare. Al di là della scelta della versione del sapere da trasporre, l'analisi delle fonti storiche fornisce gli strumenti per attivare un meta-livello di analisi che consenta di tornare al sapere trasposto nei documenti attuali (manuali o altre risorse didattiche) per ricostruire, se possibile, le articolazioni interdisciplinari alla luce dei saperi disciplinari introdotti a scuola, riaccendendo un dialogo tra storia e tradizioni didattiche scolastiche che può portare a nuove trasposizioni didattiche che tengano conto dell'interdisciplinarità che caratterizza la storia delle discipline. Come portare lo "spirito autentico" dell'interdisciplinarità in nuovi testi, creando un equilibrio tra contestualizzazione e attualizzazione e rispettando i vincoli disciplinari che caratterizzano attualmente la didattica disciplinare nella scuola secondaria è ancora un tema in larga misura aperto.

Per ripartire dai saperi storici interdisciplinari e capire come possono essere messi in relazione con i contesti scolastici attuali è necessario comprendere quali sono le versioni contestualizzate dei saperi e quelle attuali. Il problema richiederebbe una lunga disamina se trattato in generale, dunque lo decliniamo in questo articolo direttamente nel caso specifico del moto parabolico.

Un nodo epistemologico chiave di questa ricerca è quello dell'uso della dimostrazione assiomatico-deduttiva tipica della matematica in fisica e del ruolo che i processi tipici del pensiero matematico giocano nella spiegazione delle ragioni per cui il moto del proiettile, fatte le assunzioni fisiche necessarie, ha traiettoria parabolica. Questo punto è essenziale nella trasposizione didattica, in quanto, come vedremo, è nella ricostruzione di questo nodo cruciale del ragionamento che si gioca la differenza tra un approccio strumentale e strutturale all'articolazione della relazione tra matematica e fisica.

Per quanto riguarda la matematica in particolare è importante spiegare come viene intesa la dimostrazione, che ha grande rilevanza in questo articolo; a questo proposito, prenderemo come riferimento Mariotti 2000. Secondo quest'ultima, un teorema matematico è caratterizzato da un enunciato, da una dimostrazione e dal fatto che la relazione tra enunciato e dimostrazione ha senso solo all'interno di un sistema teorico. Il modello proposto sarà dunque coerente con quello che vede un teorema come terna composta da *enunciato, dimostrazione* e *teoria di riferimento*; è proprio quest'ultima che ha un ruolo fondamentale: da una parte un teorema ha una precisa collocazione nella costruzione della teoria, dall'altra, la validità di una dimostrazione è relativa a una certa teoria matematica: in altre parole una stessa dimostrazione può essere valida in una teoria e non valida in un'altra. A essa si aggiunge la metateoria, ossia l'insieme delle regole di inferenza utilizzate per dedurre nuovi enunciati a partire da assunzioni e enunciati già dimostrati.

In fisica, come in altre discipline scientifiche, la questione è più complessa in quanto si intrecciano principi e derivazioni formali con criteri di aderenza all'osservazione fenomenologica ed empirica, e le forme di spiegazione sono più variegate (Braaten, Windschitl 2011). Nel caso preso in esame, come mostreremo, è proprio nel dialogo e nell'intreccio tra queste due concezioni della dimostrazione e nel ruolo che gli oggetti e i metodi introdotti in matematica hanno nella spiegazione fisica del moto parabolico che si annida la differenza fondamentale tra testo storico e manuali per la scuola secondaria.

2.3. Il contributo dell'analisi linguistica dei testi per una nuova trasposizione didattica interdisciplinare

La scelta di analizzare testi scritti in periodi storici diversi e rivolti a interlocutori appartenenti a contesti socioculturali differenti non ha solo la finalità di confrontare saperi, ma anche di comprendere le differenze tra la costruzione di un discorso disciplinare rivolto a studenti nel contesto della scuola di oggi e un discorso interdisciplinare rivolto a un pubblico più ampio, variegato e adulto, come quello dei *Discorsi e dimostrazioni* di Galilei. Consideriamo questo aspetto essenziale, pensando alla nostra analisi come un tassello in un percorso di indagine che sul lungo termine possa portare al ripensamento della trasposizione didattica del moto parabolico in prospettiva storica e interdisciplinare. I testi sono infatti le testimonianze concrete di modi diversi di pensare, strutturare e comunicare i saperi. Per questa ragione consideriamo fondamentale condurre anche un'analisi linguistica mirata dei testi che mostri le loro caratteristiche peculiari e individui gli elementi sostanziali delle strategie comunicative messe in atto per veicolare il messaggio scientifico, con particolare attenzione al piano disciplinare e interdisciplinare, pur sempre tenendo conto, chiaramente, delle diverse situazioni comunicative. Ciò può spingere a una sintesi fruttuosa in nuovi testi interdisciplinari per la scuola secondaria, che dia spazio alla dimensione epistemologica e alla relazione strutturale tra le discipline.

Negli ultimi anni, portando a compimento approcci avviati nei decenni precedenti, si è assistito a un aumentato interesse per l'analisi del ruolo della lingua naturale nell'apprendimento e insegnamento della matematica e delle scienze, sia da parte di matematici che di linguisti (si rinvia rispettivamente a Ferrari 2004, 2021, e Viale 2019, per una rassegna bibliografica).

Per quanto riguarda la fisica, l'attenzione dei linguisti per i testi galileiani è stata intensa (si vedano i rinvii citati nel § 4.2.), ma da un lato concentrata principalmente attorno ad alcuni testi ritenuti rilevanti dal punto di vista culturale e letterario (non è un caso che le analisi abbiano spesso escluso i testi di Galilei più tecnici e di carattere fortemente scientifico) e dall'altro tesa principalmente a mostrare l'impulso dato all'italiano (al suo lessico e ad alcuni aspetti della sintassi) da Galilei e dalla sua scuola con la scelta del volgare a scapito del latino come lingua di comunicazione scientifica.

Gli strumenti di analisi utilizzati in questo contributo sono quelli tipici della linguistica, cioè il piano lessicale (le modalità di costruzione di una terminologia e l'uso di parole ed espressioni), morfosintattico (il ricorso a particolari fenomeni linguistici funzionali alla costruzione del proprio discorso) e testuale (la strutturazione dell'informazione e, in particolare, il modo in cui l'autore si rivolge al destinatario). A questi si è qui aggiunto un ulteriore piano di analisi, ritenuto particolarmente promettente dal punto di vista didattico, cioè quello pragmatico, in cui si è osservato attraverso quali impliciti sia veicolato il contenuto del testo (Sbisà 2007). Infine, riprendendo alcune teorie nate nell'ambito della linguistica educativa che hanno mostrato il ruolo della motivazione e del coinvolgimento del destinatario (*engagement with language*, si veda Svalberg 2009) per un proficuo svolgimento di compiti linguistici (come la comprensione del testo), si è cercato di osservare se e come l'autore non si limiti a esporre al destinatario dei contenuti scientifici, ma chiami direttamente in causa il suo intervento: in altri termini, se il lettore sia considerato come un semplice spettatore della scienza o un suo partecipe attore.

L'unione di tutti questi aspetti di analisi definisce un quadro che offre elementi utili a capire quanto il testo faciliti o meno nella ricezione e ricostruzione dei contenuti scientifici un lettore in formazione non appartenente alla comunità scientifica di riferimento.

3. Domanda di ricerca e metodologia utilizzata

La domanda di ricerca alla quale questo contributo cerca di dare una risposta è quali siano le principali differenze in termini di presentazione dei concetti in un testo storico e nei manuali di fisica, con particolare riferimento al tema del moto parabolico.

A questo scopo, sono stati analizzati da un punto di vista matematico, fisico e linguistico i *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* di Galilei, che prendiamo come esempio più esaustivo tra i molti possibili approcci storici alla presentazione del moto parabolico, e alcuni manuali di fisica, scelti dopo uno spoglio dei manuali in uso più diffusi (si veda l'elenco completo in Bibliografia), in quanto rappresentativi della modalità più comune di trattazione di questo argomento nel contesto scolastico, in particolare a livello liceale dagli anni Ottanta a oggi.

Come già anticipato, consideriamo questa analisi comparativa tra i testi uno snodo fondamentale nel lungo processo di trasposizione interdisciplinare per la scuola secondaria. Uno studio analogo è stato condotto da Branchetti *et al.* (2019) nel caso della radiazione di corpo nero e della nascita della fisica quantistica. In quel caso sono stati presi come testi storici di riferimento tre articoli scritti da Planck tra il 1900 e 1901 e come manuali dei testi universitari ed è stata realizzata una sperimentazione con studenti universitari, futuri insegnanti di matematica e fisica; per l'occasione i testi degli articoli sono stati alla base della creazione di un nuovo testo e di un tutorial[1], in cui erano presenti sia una contestualizzazione storica che una attualizzazione delle discipline.

[1] Pensati per essere fruibili anche da studenti di scuola secondaria.

In questo articolo, invece, dal lato della contestualizzazione storica, saranno presi in esame i brani del testo galileiano che mostrano una profonda relazione tra matematica e fisica: ci siamo focalizzati in particolare sull'incipit della terza giornata e sulla dimostrazione presentata nella quarta. Questa parte viene solitamente trattata come uno dei possibili esempi di applicazione delle leggi della cinematica e della meccanica e come contesto per usare l'equazione della parabola per risolvere problemi di fisica (come vedremo nell'analisi dei manuali). Storicamente, però, questo è stato un caso di studio chiave, che ha portato Galilei a matematizzare lo spazio e il tempo e a mostrare non solo che una traiettoria, oggetto di studio delle scienze della natura, poteva essere trattata come oggetto matematico, come conica, ma anche che si poteva dimostrare in modo matematicamente rigoroso che se il moto considerato verificava certi principi fisici (l'indipendenza e la composizione di un moto uniforme e uno uniformemente accelerato), la traiettoria non poteva che essere una parabola. Tali principi fisici, a loro volta non pre-esistevano allo studio geometrico del moto del proiettile, ma sono stati elaborati proprio per affrontare questo problema in modo deduttivo rigoroso e derivare da assiomi quanto era stato congetturato prima in fase di osservazione del fenomeno e poi sperimentalmente, scardinando alcuni dei pilastri della tradizione aristotelica (Cereta 2019). Esempi come questo servono proprio a mostrare l'interdipendenza profonda tra le discipline e l'impatto delle interazioni tra esse sull'evoluzione della loro struttura epistemologica, mettendo in crisi il paradigma strumentale/applicativo che vuole prima la formulazione del problema fisico e poi l'uso di strumenti della matematica per supportare la sua risoluzione.

Rifacendoci alla prospettiva della co-evoluzione presentata sopra, l'estratto dal testo storico di Galilei sarà dunque preso in esame come sapere interdisciplinare di riferimento che rappresenta un intreccio significativo tra matematica e fisica, che incarna il paradigma della co-evoluzione; infatti nel testo galileiano, come mostreremo, vengono rispettate alcune delle caratteristiche fondamentali di un approccio interdisciplinare (nel senso di Frodeman *et al.* 2017): i riferimenti alle discipline sono evidenti e compaiono in modo epistemologicamente significativo, il loro intreccio è esplicito e visibile e viene motivato e argomentato da parte dell'autore.

I manuali sono presi invece come esempi di trasposizioni e di attualizzazioni disciplinari; si analizzeranno manuali di fisica perché è in essi che viene presentata la trattazione attuale scolastica del moto parabolico. Alcuni testi di matematica saranno analizzati come strumenti ausiliari per individuare la versione dei concetti matematici e i modi in cui la conoscenza matematica è stata presentata agli stessi studenti.

L'analisi è stata condotta seguendo queste fasi:

1. analisi dal punto di vista matematico e fisico per individuare i nodi epistemologici fondamentali e gli aspetti di interdisciplinarità;

2. analisi linguistica dei testi con gli strumenti per capire le risorse linguistiche attivate nelle diverse modalità di presentazione dei temi;
3. confronto tra analisi linguistica e interdisciplinare per capire i punti di forza e di debolezza dal punto di vista matematico, fisico e linguistico dei diversi testi analizzati.

Nell'analisi dei saperi da un punto di vista matematico e fisico, viste le finalità dell'articolo, nelle versioni del moto parabolico presentate nei diversi testi prenderemo in esame:

- i concetti matematici e fisici usati;
- le teorie di riferimento matematiche e fisiche, dentro cui si strutturano i concetti e le spiegazioni, e le forme di spiegazione, argomentazione e dimostrazione presenti nei testi;
- i nodi epistemologici, che sono particolari temi che hanno condotto storicamente a una trasformazione della conoscenza; in questo caso analizzeremo i temi che hanno portato alla matematizzazione dello studio dei moti sulla Terra, che hanno fortemente influenzato la relazione tra matematica e fisica;
- gli intrecci interdisciplinari, con particolare al ruolo che la matematica gioca nel discorso fisico (vista la natura del problema preso in esame, che è il moto parabolico).

Alcuni estratti dal testo storico sono stati analizzati da un punto di vista matematico e fisico secondo la prospettiva della contestualizzazione storica.

Un'analisi analoga è stata poi condotta su dei manuali di fisica per la scuola secondaria. Dal momento che, diversamente dal testo storico, nei manuali di fisica la matematica appariva con ruolo strumentale, senza l'esplicitazione degli aspetti epistemologici della matematica, ed era implicito il riferimento a concetti, definizioni e metodi introdotti in matematica, è stata condotta un'analisi dei contenuti matematici rilevanti per la trattazione presentata nei testi fisica, selezionando alcuni libri di testo di matematica pensati per studenti dello stesso livello scolastico.

Dal momento che i manuali per la scuola secondaria sono risultati estremamente lontani dal testo storico, viste le prospettive radicalmente diverse che li caratterizzano sia dal punto di vista epistemologico che dal punto di vista della visione dell'interdisciplinarità, al punto da rendere sostanzialmente impossibile trovare una mediazione tra le due prospettive, è stata condotta una ricerca bibliografica cercando altre tipologie di testi in cui fosse presente una attualizzazione delle discipline, senza perdere completamente l'esplicitazione della dimensione epistemologica disciplinare e tenendo vivo nel testo il dialogo interdisciplinare. L'unico testo identificato tra quelli esaminati è stato un manuale di fisica universitario. L'analisi di questo testo, che esula dall'elenco dei manuali scolastici, ha lo scopo di esemplificare la struttura di un possibile testo che abbia alcune caratteristiche positive del testo storico ma una prospettiva di attualizzazione che lo renda fruibile nei contesti scolastici di oggi.

Non consideriamo in alcun modo questo testo un esempio di manuale da proporre nella scuola secondaria, ma come un testo in grado di costituire un esempio da cui partire per la produzione di futuri testi che possano fungere da materiali didattici opportuni per una didattica interdisciplinare della matematica e della fisica nel caso del moto parabolico. Il senso di questa analisi è dunque quello di superare la logica comparativa secondo cui i manuali non possono funzionare come strumenti per una didattica interdisciplinare, facendo un piccolo passo ulteriore nella direzione di suggerire delle possibili soluzioni per la produzione di nuovi testi.

4. Analisi da un punto di vista matematico, fisico e linguistico di alcuni passi dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* di Galilei

4.1. Analisi da un punto di vista matematico e fisico

Gli estratti del testo di Galilei analizzati hanno come focus principale lo studio dei moti sulla Terra. A seguito di un richiamo storico e di un inquadramento nel panorama degli studi noti al tempo sul tema, Galilei prende posizione, esplicitando le sue assunzioni sui tipi di moti studiati e sulle tipologie di indagine, collocandosi rispetto a esse e precisando le peculiarità del suo approccio.

Proviamo a osservare più in dettaglio[2]. Nella giornata terza, Galilei introduce il moto locale. La volontà dichiarata dall'autore in più occasioni è quella di passare al livello della dimostrazione e l'impostazione è quella assiomatico-deduttiva. Dichiara infatti fin dall'inizio:

> Diamo avvio a una nuovissima scienza intorno a un soggetto antichissimo. Nulla v'è, forse, in natura, di più antico del moto, e su di esso ci sono non pochi volumi, né di piccola mole, scritti dai filosofi; tuttavia tra le sue proprietà ne trova molte che, pur degne di essere conosciute, non sono mai state finora osservate, nonché dimostrate. Se ne rilevano alcune più immediate, come quella, ad esempio, che il moto naturale dei gravi discendenti accelera continuamente; però, secondo quale proporzione tale accelerazione avvenga, non è stato sin qui mostrato: nessuno, che io sappia, infatti, ha dimostrato che un mobile discendente a partire dalla quiete percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi ab unitate. È stato osservato che i corpi lanciati, ovverossia i proietti, descrivono una linea curva di un qualche tipo; però, che essa sia una parabola, nessuno l'ha mostrato. Che sia così, lo dimostrerò insieme ad altre non poche cose, né meno degne di

[2] Nella parte di analisi disciplinare e interdisciplinare ci occuperemo del testo di Galileo nella versione con traduzione della parte in latino in italiano, nell'edizione di Galilei 1980, dalla pagina 722 e seguenti. Il testo in originale sarà analizzato nella parte dedicata alla linguistica.

essere conosciute, e, ciò che ritengo ancor più importante, si apriranno le porte a una vastissima e importantissima scienza, della quale queste nostre ricerche costituiranno gli elementi; altri ingegni più acuti del mio ne penetreranno poi più ascosi recessi.

A questa porzione di testo, segue una definizione fondamentale:

Circa il moto equabile o uniforme, ci occorre una sola definizione, che formulo così:

DEFINIZIONE
Moto eguale o uniforme intendo quello in cui gli spazi percorsi da un mobile in tempi eguali, comunque presi, risultano tra di loro eguali.

Dalla precedente definizione dipendono quattro assiomi, cioè:

ASSIOMA 1
In uno stesso moto equabile, lo spazio percorso in un tempo più lungo è maggiore dello spazio percorso in un tempo più breve.
ASSIOMA 2
In uno stesso moto equabile, il tempo in cui è percorso uno spazio maggiore è più lungo del tempo impiegato a percorrere uno spazio minore.
ASSIOMA 3
Lo spazio, percorso in un dato tempo a velocità maggiore, è maggiore di quello percorso, nello stesso tempo, a velocità minore.
ASSIOMA 4
La velocità, con cui in un dato tempo viene percorso uno spazio maggiore, è maggiore di quella con cui, nello stesso tempo, viene percorso uno spazio minore.

E a partire da essi sono formulati e dimostrati dei teoremi. Eccone un esempio:

TEOREMA 1.
Se un mobile, dotato di moto equabile, percorre due spazi con una stessa velocità, i tempi dei moti staranno tra di loro come gli spazi percorsi.

C'è in questo teorema un interessante intreccio tra matematica e fisica che si rivela anche dal punto di vista linguistico: la forma è un *se... allora...* tipico della spiegazione matematica riferito a oggetti che appartengono al dominio della fisica, sviluppando così una matematizzazione del fenomeno descritto. Questa impostazione si rivela fondamentale anche nel seguito, quando la traiettoria del proiettile deve essere analizzata non tanto come traccia ma come curva matematica, per poterla trattare da un punto di vista geometrico all'interno di una dimostrazione.

A tal proposito Galilei richiama le proprietà geometriche della parabola che saranno poi necessarie alla spiegazione, richiamando Apollonio:

la linea descritta dal proietto esser parabolica, mi vo imaginando che, non dovendosi trattar d'altro che di tali linee, sia assolutamente necessario avere una perfetta intelligenza, se non di tutte le passioni di tali figure dimostrate da Apollonio, almeno di quelle che per la presente scienza son necessarie.

Il rinvio ad Apollonio permette di osservare il fenomeno attraverso quella che in Geometria analitica viene modernamente espressa come una relazione di proporzionalità quadratica tra ascissa e ordinata.

Intendasi il cono retto, la cui base sia il cerchio ibkc, e vertice il punto l, nel quale, segato con un piano parallelo al lato lk, nasca la sezzione bac, detta parabola; la cui base bc seghi ad angoli retti il diametro ik del cerchio ibkc, e sia l'asse della parabola ad parallelo al lato lk; e preso qualsivoglia punto f nella linea bfa, tirisi la retta fe parallela alla bd: dico che il quadrato della bd al quadrato della fe ha la medesima proporzione che l'asse da alla parte ae.

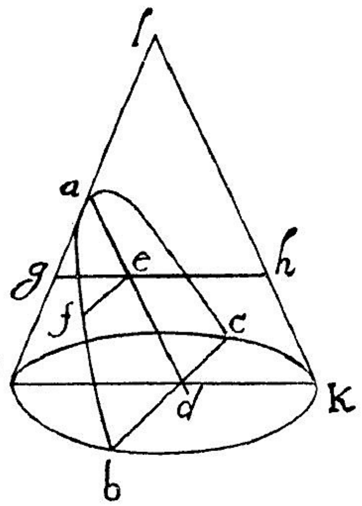


Figura 1: Immagine dalla giornata quarta, Galilei 1638/1888: 270

Nella quarta giornata, a partire da principi fisici e dalle definizioni, dagli assiomi e dai teoremi della terza giornata, si passa alla dimostrazione della traiettoria parabolica del moto del proiettile. Le assunzioni fisiche sono le seguenti: si prende in esame «un mobile, mentre si muove con moto composto di un duplice movimento, cioè di un movimento equabile e di uno naturalmente accelerato: tale appunto sembra essere quello che chiamiamo moto dei proietti». L'indipendenza dei due moti viene postulata, così come la possibilità di combinare i due moti. L'autore procede con i teoremi, che stabiliscono le proprietà di tale moto:

Ne dimostreremo parecchie proprietà: la prima delle quali sia [la seguente].
TEOREMA 1. PROPOSIZIONE 1
Un proietto, mentre si muove di moto composto di un moto orizzontale equabile e di un moto *deorsum* naturalmente accelerato, descrive nel suo movimento una linea semiparabolica.

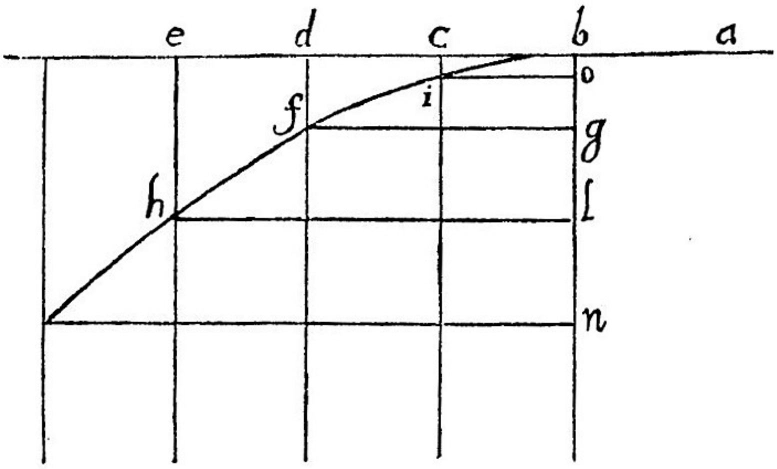


Figura 2: Immagine dalla giornata quarta, Galilei 1638/1888: 272

Nella dimostrazione vengono messe in relazione leggi che regolano le relazioni tra spazi e tempi nel moto uniforme e uniformemente accelerato con le proprietà geometriche della parabola. Alcuni estratti significativi dal punto di vista dell'interdisciplinarità sono i seguenti:

Si intenda inoltre che la linea be, la quale prosegue il piano ab per diritto, rappresenti lo scorrere del tempo, ossia [ne costituisca] la misura, e su di essa si segnino ad arbitrio un numero qualsiasi di porzioni di tempo eguali, bc, cd, de; inoltre dai punti b, c, d, e si intendano condotte linee equidistanti dalla perpendicolare bn: sulla prima di esse si prenda una parte qualsiasi ci; sulla [linea] successiva se ne prenda una quattro volte maggiore, df; [sulla terza,] una nove volte maggiore, eh; e così di séguito sulle altre linee secondo la proporzione dei quadrati delle [porzioni di tempo] cb, db, eb, o vogliam dire in duplicata proporzione delle medesime.
Se poi intendiamo che al mobile, il quale si muove oltre b verso c con moto equabile, si aggiunga un movimento di discesa perpendicolare secondo la quantità ci, nel tempo bc [esso mobile] si troverà situato nell'estremo i. Ma continuando a muoversi, nel tempo db, cioè [in un tempo] doppio di bc, sarà disceso per uno spazio quattro volte maggiore del primo spazio ci; abbiamo infatti dimostrato nel primo trattato, che gli spazi percorsi da un grave, con moto naturalmente accelerato, sono in duplicata proporzione dei tempi: e parimenti, il successivo spazio eh, percorso nel tempo be, sarà nove [volte maggiore del primo spazio]:

> sì che risulterà manifesto che gli spazi eh, df, ci stanno tra di loro come i quadrati delle linee eb, db, cb. Si conducano ora dai punti i, f, h le rette io, fg, hl, equidistanti dalla medesima eb: le linee hl, fg, io saranno eguali, ad una ad una, alle linee eb, db, cb; e così pure le linee bo, bg, bl saranno eguali alle linee ci, df, eh; inoltre il quadrato di hl starà al quadrato di fg come la linea lb sta alla bg, e il quadrato di fg starà al quadrato di io come gb sta a bo; dunque, i punti i, f, h si trovano su un'unica e medesima linea parabolica. Similmente si dimostrerà che, preso un numero qualsiasi di particole di tempo eguali di qualunque grandezza, i punti, che il mobile mosso di un simile moto composto occuperà in quei tempi, si troveranno su una medesima linea parabolica. È dunque manifesto quello che ci eravamo proposti.

4.1.1. Sintesi dell'analisi da un punto di vista matematico e fisico

Coerentemente con quanto descritto nel paragrafo precedente, mettiamo ora in evidenza i concetti matematici e fisici usati, le teorie di riferimento matematiche e fisiche, le forme di spiegazione, argomentazione e dimostrazione presenti nei testi. Partiamo dall'introduzione di Galilei, in cui colloca i suoi studi rispetto ai lavori più tradizionali sul tema. Questa scelta, da un punto di vista epistemologico, è interessante: mostra infatti una prassi tipica della presentazione di studi in ambito scientifico, cioè quella di dichiarare le proprie assunzioni e collocarsi in un panorama di altri studi.

All'inizio della giornata terza, Galilei introduce una definizione e gli assiomi e prepara il terreno per proporre delle dimostrazioni, di stampo euclideo, dei suoi risultati, presentati in forma di proposizioni. La terminologia è ancora prevalentemente legata allo studio classico dei moti, ma viene utilizzato il concetto di *proporzione* e le definizioni hanno la forma delle definizioni che si possono ritrovare negli *Elementi* di Euclide. I rapporti e le proporzioni sono i concetti matematici più utilizzati, e non servono tanto a fare i calcoli, quanto a concettualizzare in un modo nuovo il problema del moto attraverso una matematizzazione degli enti coinvolti. Vengono infatti usati per stabilire criteri di confronto tra tempi e spazi e definire il moto equabile senza parlare inizialmente di velocità in termini qualitativi, come succedeva negli studi precedenti. I rapporti e le proporzioni non erano solo strumenti concettuali efficaci ma avevano uno statuto epistemologico molto importante all'epoca: erano definiti negli *Elementi* di Euclide, le proposizioni relative alle loro proprietà erano dimostrate ed erano tra i concetti matematici più utilizzati nelle dimostrazioni riportate nei classici. Inoltre, le proprietà delle sezioni coniche erano tradizionalmente espresse nel linguaggio dei rapporti e delle proporzioni, dunque le scelte di Galilei dal punto di vista matematica sono coerenti, precise, e seguono i criteri di rigore dei classici, che ai tempi erano estremamente valorizzati.

Questa scelta rappresenta la volontà di Galilei di superare una descrizione e interpretazione metafisica dei moti, di stampo aristotelico, o una spiegazione basata su osservazioni e analogie con altri fenomeni naturali dovuti a cause analoghe (es. la gravità dei corpi con massa), introducendo un nuovo modo di derivare leggi fisiche da principi e assunzioni, ispirato a quello euclideo, in cui la matematica come teoria e sorgente di concetti gioca un ruolo nuovo.

Nella quarta giornata, per dimostrare che la traiettoria è una parabola, propone una "pausa matematica" per introdurre una costruzione accompagnata da una definizione e una caratterizzazione dell'oggetto attraverso un'uguaglianza di rapporti: si tratta della caratterizzazione della parabola come sezione conica e dell'enunciazione di proprietà corredate da dimostrazioni. Galilei enuncia e dimostra tutte e sole le proposizioni che utilizzerà. Le proposizioni matematiche utilizzate nelle dimostrazioni sono prese dagli *Elementi* (anche dal libro II, detto dell'*algebra geometrica*) e le proposizioni relative ai moti usate all'interno delle dimostrazioni contengono proprietà e relazioni tra oggetti che sono derivate da definizioni.

La scelta di esplicitare assiomi ed enunciare proposizioni e corredarle di dimostrazioni, che rende riconoscibile una prassi tipica della geometria di Euclide, viene riproposta quando si parla dei moti e delle grandezze fisiche. All'esperimento viene dato il ruolo di confermare o disconfermare ipotesi e conclusioni derivate da esse.

I nodi epistemologici messi in evidenza esplicitamente da Galilei sono numerosi. Ai fini del confronto con i libri di testo e di una riflessione sulle trasposizioni didattiche proposte in essi, solo alcuni di essi risultano rilevanti da evidenziare, in particolare due.

Il primo è senza dubbio la matematizzazione della fisica, manifesta tanto negli assiomi iniziali, nei quali si delineano relazioni matematiche tra grandezze fisiche (proporzionalità), quanto nell'impiego di una struttura dimostrativa di impostazione assiomatico-deduttiva. La dimostrazione, quindi, diventa un essenziale meta-oggetto per la fisica.

Il secondo nodo epistemologico è quello della scomposizione/composizione dei moti. Proprio durante la dimostrazione, addotta da Salviati nella quarta giornata, il moto del proiettile viene scomposto in moto rettilineo uniforme, nella direzione orizzontale, e moto *naturalmente* accelerato, nella direzione verticale. È la composizione dei due moti, supposti indipendenti l'uno dall'altro, a far sì che la traiettoria disegnata dal grave sia semi-parabolica.

Per quanto riguarda gli intrecci interdisciplinari, con particolare riferimento al ruolo che la matematica gioca nell'analisi del problema, Galilei opera sia scelte significative sia a livello argomentativo che a livello di dettaglio tecnico. Nel primo estratto il tempo viene "spazializzato" e rappresentato attraverso segmenti e vengono costruiti segmenti che corrispondono a lunghezze pari ai quadrati dei primi numeri interi (unità). Nel secondo estratto si utilizza lo stesso diagramma per fare creare un parallelismo tra la relazione quadratica tra spazi e tempi (spazializzati) data dalla legge del moto accelerato uniformemente e quella tra le ascisse e le ordinate (nel senso di Apollonio) corrispondenti.

Con l'introduzione della spazializzazione del tempo, che diventa una grandezza misurabile, rappresentabile e manipolabile con gli strumenti forniti dalla teoria delle grandezze di Eudosso, attraverso rapporti e proporzioni, Galilei costruisce un discorso ibrido e sente il bisogno di giustificare questa scelta richiamando un celebre antesignano: Archimede. Con una simile ibridazione, anche se con un obiettivo complementare (individuare una relazione tra oggetti matematici a partire da proprietà geometriche e analogie fisiche), Archimede aveva prodotto congetture su oggetti matematici sfruttando leggi sulle leve, espresse in forma proporzionale, e andando via via a ridurre le caratteristiche fisiche degli oggetti coinvolti fino a farle diventare relazioni di proporzionalità tra segmenti (il *metodo meccanico*, cfr. Assis, Magnaghi 2016).

4.2. Analisi linguistica e confronto tra punto di vista matematico, fisico e linguistico

Prima di addentrarsi nell'analisi linguistica dei passi di Galilei sul moto parabolico oggetto di riflessione, occorre precisare che il volgare toscano usato da Galilei nelle sue opere scientifiche è stato oggetto di numerosi studi da parte di linguisti e storici della lingua italiana. Pur nella difficoltà di dar conto di una bibliografia così vasta, come introduzione alla lingua scientifica di Galilei si segnalano in particolare tra i molti lavori disponibili Bolelli 1955, Altieri Biagi 1984, 2010, Di Giandomenico, Guaragnella 2006. Gli aspetti più propriamente terminologici sono approfonditi da Migliorini (1948) e Altieri Biagi (1965); quelli sintattici da Altieri Biagi (1995); gli aspetti retorici da Battistini (1978).

L'analisi qui proposta si propone di evidenziare in primo luogo le peculiarità linguistiche attraverso le quali l'autore guida il lettore (specialista e no) in un percorso di scoperta dei contenuti scientifici esposti, nella consapevolezza che la grandezza scientifica di Galilei e la fortuna dei suoi scritti siano anche legate a questo suo "sforzo didattico e comunicativo", fondato in primo luogo su un uso sapiente delle proprie risorse linguistiche[3].

I *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* sono stati pubblicati nel 1638 a Leida. L'opera è una commistione tra il trattato in latino di Galilei e un dialogo in volgare tra lo scienziato Filippo Salviati, il nobile Giovanni Francesco Sagredo e il personaggio inventato di Simplicio, già protagonisti del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* del 1632.

[3] Per quanto riguarda il rapporto tra scrittura latina e volgare in Galilei, anche in rapporto all'opera qui analizzata, si veda in particolare il recente Bianchi 2020.

Nei *Discorsi* i tre leggono, s'interrogano e commentano diversi fenomeni, tra cui quello del moto del proiettile, a cui sono dedicate parte della terza giornata e la quarta, in cui viene invece ampiamente discusso. L'analisi è stata svolta su queste sezioni: sono state rilevate alcune caratteristiche lessicali e testuali che mostrano e fanno capire quale sia la struttura epistemologica della *nova scientia*.

Le scelte linguistiche attuate dall'autore esplicitano innanzitutto l'intenzione di creare un nuovo percorso scientifico, rigoroso e comunque rispettoso della tradizione, nel quale, come detto, diventa fondamentale la collaborazione tra matematica e fisica.

La terza giornata incomincia «ex abrupto» (Bianchi 2020: 72) con il brano latino che introduce ai concetti di moto locale (*de motu locali*) e moto equabile (de *motu aequabili*). Il brano si apre con una frase chiasmatica, che colloca il fenomeno trattato all'interno degli studi già svolti (*subiecto vetustissimo*) e riconosce allo stesso tempo l'originalità dell'osservazione galileiana (*novissimam promovemus scientiam*):

> De subiecto vetustissimo novissimam promovemus scientiam [Diamo avvio a una nuovissima scienza intorno a un soggetto antichissimo][4] (Galilei 1638/1888: 190).

La novità che sta per essere presentata non riguarda tanto l'argomento (si tratta infatti di un *subiecto vetustissimo*) quanto i paradigmi disciplinari ai quali verrà fatto riferimento per la sua spiegazione. Da ciò deriva anche l'esigenza di *nominare* e *definire* oggetti e nozioni utili a inquadrare teoricamente i fenomeni. Questo avviene ancora una volta nel trattato in latino, sia nella terza sia nella quarta giornata, con la definizione del moto equabile e del *proiettile*; in quest'ultimo caso, con le frasi *cuius generationem talem constituo* e *quem proiectionem voco* il lettore sembra essere messo di fronte a un atto di nascita:

> *definitio*. Aeqalem, seu uniformem, motum intelligo cum, cuius parte quibuscunque temporibus aeqaulis a mobili peractae, sunt inter se aequales. Admonitio. Visum est addere veteri definitioni [...] particulam quibuscumque, hoc est omnibus temporibus aequalibus [*Definizione*. Moto eguale o uniforme intendo quello in cui gli spazi percorsi da un mobile in tempi eguali, comunque presi, risultano tra di loro eguali. Ammonizione. Ci è parso opportuno aggiungere alla vecchia definizione [...] l'espressione comunque presi, cioè per tutti i tempi che siano eguali] (Galilei 1638/1888: 191).
>
> huiusmodi autem videtur esse motus ille, quem de proiectis dicimus: cuius generationem talem constituo. [...] indeque motus quidam emerget compositus ex aequabili hotizontali et ex deorsum naturaliter accelerato, quem proiectionem

[4] Le traduzioni latine riportate tra parentesi sono tratte dall'edizione del testo galileiano curato da Franz Brunetti (Galilei 1638/1980).

> voco [tale appunto sembra essere quello che chiamiamo moto dei proietti; la generazione dei quali così stabilisco. […] ne nasce un moto composto di un moto orizzontale equabile e di un moto deorsum naturalmente accelerato, il quale chiamo proiezione] (Galilei 1638/1888: 269).

Il dialogo in volgare sottolinea ulteriormente la novità, riferendosi al contesto storico delle scienze; il costrutto *non mi sovvien* spinge il lettore a inferire che probabilmente non vi siano autori conosciuti che si siano preoccupati dell'argomento nei termini in cui se ne è occupato da Galilei:

> perché, se bene i nostri filosofi hanno trattata questa materia del moto de' proietti, non mi sovvien che si siano ristretti a definire quali siano le linee da quelli descritte (Galilei 1638/1888: 270).

È però ancora nel trattato latino che si delineano primariamente i nodi epistemologici della matematica e della fisica. Nella terza giornata, infatti, gli *assiomi* e i *teoremi*, costruiti con locuzioni tipiche come *si…igitur*[5], sono gli strumenti utili ad attivare, ordinare e a delineare i concetti fisici chiave per la comprensione del moto (*spatium, tempus*, *velocitas*):

> Theorema I, Propositio I. Si mobile aequabiliter latum eademque cum velocitate duo pertranseant spatia, tempora lationum erunt inter se ut spatia peracta [Se un mobile, dotato di moto equabile, percorre due spazi con una stessa velocità, i tempi dei moti staranno tra di loro come gli spazi percorsi] (Galilei 1638/1888: 192).

Il lessico adoperato, sia in latino sia in volgare, conferma l'intreccio tra le due discipline. In latino si trovano termini e locuzioni che richiamano oggetti fisici, come *naturalem motum gravium discendentium*, *spatia a mobili descendente ex quiete*, e matematici *proportionem*, *retinere rationem*, *lineam qualitercunque curvam disegnare*, *parabulam*. In volgare, per la fisica si incontrano termini come *resistenze*, *proietti*, *moto de' proietti*, *velocità*, *spazio*, *tempo* e per la matematica *geometria, parabole, sezioni coniche, linea, perpendicolari*, ecc. L'intreccio di questi termini consente di attivare al momento della lettura il richiamo alle discipline della fisica e della matematica e, poi, di spingere a una loro riproposizione e riconfigurazione ai fini della comprensione del fenomeno.

L'intreccio tra metodi e strutture argomentative tipiche della matematica e della fisica viene giustificato facendo riferimento ad altri testi classici in cui i principi geometrici sono già mischiati con leggi fisiche nella risoluzione del problema classico della quadratura meccanica del segmento parabolico:

> E la sola autorità d'Archimede può quietare ogn'uno, il quale, nelle sue Mecaniche e nella prima Quadratura della parabola, piglia come principio vero, l'ago

[5] Si è già accennato al riguardo in § 4.1.

della bilancia o stadera essere una linea retta in ogni suo punto equalmente distante dal centro commune de i gravi, e le corde alle quali sono appesi i gravi esser tra di loro parallele (Galilei 1638/1888: 274).

La necessità di questa collaborazione tra le due scienze è esplicitata negli stessi interventi degli interlocutori, che indicano direttamente quali oggetti matematici siano necessari per seguire il ragionamento che sottostà alla spiegazione del fenomeno fisico, proponendoli al lettore come strumenti di conoscenza.

Di fronte al primo teorema, Sagredo e Simplicio chiedono delucidazioni sull'argomento e dichiarano subito quali siano le lacune, sia concettuali sia lessicali: affermano di non conoscere le nozioni di geometria a cui si fa riferimento né la terminologia latina usata nel trattato:

SAGR. È forza, Sig. Salviati, in grazia di me, ed anco, credo io, del Sig. Simplicio, far qui un poco di pausa; avvenga che io non mi son tanto inoltrato nella geometria, che io abbia fatto studio in Apollonio, se non in quanto so ch'ei tratta di queste parabole e dell'altre sezzioni coniche, senza la cognizione dele quali e delle lor passioni non credo che intendarsi possano le dimostrazioni di altre proposizioni a quelle aderenti

SIMP. E poi, rispetto a me [...] cominciano già a giugner come nuovi gli stessi primi termini. (Galilei 1638/1888: 269).

Lo stesso Salviati seleziona quali tra gli aspetti geometrici debbano essere richiamati per la piena comprensione del fenomeno:

perché io ancora in quella volta non aveva in pronto i libri di Apollonio, s'ingegnò di dimostrarmi due passioni principalissime di essa parabola, senza veruna altra precognizione, delle quali sole siamo bisognosi [...] L'altra proposizione, pur necessaria al presente trattato, così faremo manifesta (Galilei 1638/1888: 270).

In effetti, la parte del dialogo in volgare sembra proprio tesa a esplicitare ciò che nel trattato è lasciato implicito in quanto, forse, ritenuto già noto al tipico destinatario di un trattato scientifico, ovvero la comunità scientifica:[6].

SALV. Veramente tutti i matematici non vulgari suppongono che il lettore abia prontissimi al meno gli Elementi di Euclide: e qui, per supplire al vostro bisogno, basterà ricordarvi una proposizione del secondo (Galilei 1638/1888: 272).

[6] La commistione tra due generi testuali diversi e due lingue diverse spinge a pensare a due destinatari diversi: sia la comunità scientifica sia quella del lettore comune (con lettore comune è da intendere comunque un lettore che nel Seicento fosse in grado di leggere e scrivere e avesse una qualche conoscenza scientifica); si veda anche Bianchi 2020: 76-77.

Se è negli scritti latini che sono creati gli oggetti e date indicazioni epistemologiche sulla loro interpretazione, nel dialogo volgare essi vengono spiegati in maniera più diffusa[7]; ciò accade, per esempio nella quarta giornata, in cui la dimostrazione geometrica, riportata prima in latino, viene poi riproposta e ampliata da Salviati:

> Intelligatur horizontalis linea seu planum ab in sublimi positum, super quo ex a in b motu aequabili feratur mobile; deficiente vero plani fulcimento in b, superveniat ipsi mobili, a propria gravitate, motus naturalis doersum iuxta perpendiculare bn [Si intenda la linea orizzontale ossia il piano ab posto in alto, e un mobile si muova su di esso da a in b di moto equabile; mancando ora il sostegno del piano in b, sopravvenga al medesimo mobile, per la propria gravità, un moto naturale deorsum secondo la perpendicolare bn] (Galilei 1638/1888: 272).
>
> SALV. Questa conclusione si raccoglie dal converso della prima delle due proposizioni poste di sopra. Imperò che, descritta, per esempio la parabola per li punti *b*, *h*, se alcuno delli 2 *f*, *i* non fusse nella descritta linea parabolica, sarebbe dentro o fuori e, per conseguenza, la linea *fb* sarebbe o minore o maggiore di quella che andasse a terminare nella linea parabolica (Galilei 1638/1888: 273).

Il dialogo risulta essere quasi un ampliamento del trattato, la parte divulgativa, il luogo in cui i tre protagonisti si interrogano sugli scritti latini e li commentano, permettendo l'esplicitazione e quindi l'attivazione delle conoscenze necessarie a comprenderli. In particolare, Salviati sembra assumere il ruolo di mediatore tra la comunità scientifica e il comune lettore.

L'opera di Galilei intreccia così trattazione scientifica e sua discussione e sembra riservare ai due scopi due generi e due lingue diverse. Mentre nel trattato latino si pongono le fondamenta della nuova scienza, con la definizione dei nuovi concetti e i passi dimostrativi, nel dialogo volgare si lascia spazio al recupero delle possibili lacune matematiche e geometriche fondamentali alla loro comprensione, date invece per scontate nel trattato. Non solo: gli interventi di Sagredo e Simplicio servono anche a opporre resistenze e dubbi nell'accettazione di tali novità, risolte da Salviati[8].

Galilei si dimostra molto attento alle esigenze del lettore, consapevole che non tutti coloro che leggeranno il suo libro siano edotti sull'argomento e che alcuni punti potrebbero risultare ostici: il dialogo gli permette di spiegare a tutti (e non solo a coloro che avessero condotto studi approfonditi sui fenomeni fisici) di anticipare le possibili obiezioni e apprendere gli strumenti e il linguaggio fondamentale al fine di poter comprendere la «novissimam scientiam» e avere così accesso allo studio dei fenomeni fisici. L'autore denuda dunque l'intero ragionamento, guidando il lettore nel percorso di apprendimento lungo il quale limita la formazione di errate interpretazioni del testo.

---

[7] Si veda Carugo 1958: 757 per risultati di analisi simili.
[8] Sulle diverse possibilità di interpretazione dell'intreccio latino-volgare nei *Discorsi*, cfr. Bianchi 2020: 73-83.

5. Analisi da un punto di vista matematico, fisico e linguistico di manuali di fisica di scuola secondaria

5.1. Un confronto comparativo tra manuali di fisica da un punto di vista matematico e fisico

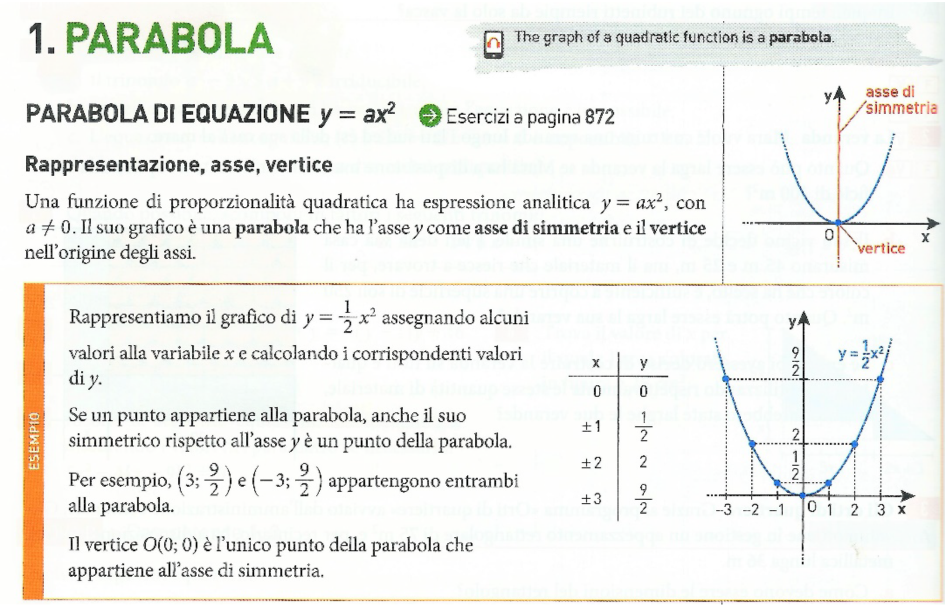
I manuali di fisica per la scuola secondaria considerati come rappresentativi della trattazione più comune del moto parabolico sono stati i seguenti: Pugliese Jona 1984, Cantelli 1998, Caforio, Ferilli 2000, Cutnell *et al.* 2017. I testi scelti permettono di dare conto di elementi di continuità e discontinuità nella trattazione del moto parabolico nei manuali negli ultimi decenni. Partiamo, come anticipato, dall'analisi delle trattazioni più comuni nei manuali di matematica.

5.1.1. La parabola nei manuali di matematica

I manuali di matematica, che hanno il solo ruolo di esaminare la presentazione della conoscenza matematica istituzionalizzata nei Licei e rilevante per la trattazione del moto parabolico nei manuali di fisica, sono stati i seguenti: Dodero *et al.* 2012, Bergamini *et al.* 2015 e Consolini, Gambotto 2019. Questi manuali riportano tutti la stessa presentazione della parabola nel contesto della geometria analitica, anche se in modo diverso fanno riferimento ad altre caratterizzazioni dell'oggetto, e sono rappresentativi delle trattazioni presenti anche in altri testi che abbiamo esaminato in seguito.

Nei libri di testo di matematica per la scuola secondaria esaminati, la parabola viene definita come luogo di punti e poi viene collocata all'interno della geometria analitica per mezzo di una equazione e della sua rappresentazione come curva in sistema cartesiano piano, dopo aver individuato alcune coppie di valori reali che soddisfano l'equazione e che sono coordinate di punti che appartengono alla curva. Addirittura in alcune trasposizioni la parabola è presentata come grafico della funzione quadratica, senza premettere l'introduzione come sezione conica o come luogo di punti.

Vediamo ad esempio il caso del Bergamini *et al.* 2015 in fig. 3. Il titolo della sezione è *Parabole, equazioni, sistemi*. Si noti inoltre come fin dalla prima riga, affianco al titolo, si faccia immediatamente riferimento alla risoluzione di esercizi e come l'espressione analitica sia seguita dall'informazione sul fatto che la traiettoria sia una parabola, lasciando in implicito la definizione di tale oggetto, che dunque risulta coincidere con il grafico associato a una funzione che ha equazione quadratica.



1. PARABOLA

The graph of a quadratic function is a **parabola**.

PARABOLA DI EQUAZIONE $y = ax^2$

Esercizi a pagina 872

Rappresentazione, asse, vertice

Una funzione di proporzionalità quadratica ha espressione analitica $y = ax^2$, con $a \neq 0$. Il suo grafico è una **parabola** che ha l'asse y come **asse di simmetria** e il **vertice** nell'origine degli assi.

ESEMPIO

Rappresentiamo il grafico di $y = \frac{1}{2}x^2$ assegnando alcuni valori alla variabile x e calcolando i corrispondenti valori di y.

x	y
0	0
±1	$\frac{1}{2}$
±2	2
±3	$\frac{9}{2}$

Se un punto appartiene alla parabola, anche il suo simmetrico rispetto all'asse y è un punto della parabola.

Per esempio, $\left(3; \frac{9}{2}\right)$ e $\left(-3; \frac{9}{2}\right)$ appartengono entrambi alla parabola.

Il vertice $O(0; 0)$ è l'unico punto della parabola che appartiene all'asse di simmetria.

Figura 3: Estratto da Bergamini *et al.* 2015: 860

Nel testo di Consolini e Gambotto, si trova ancora una volta una trasposizione funzionale chiara sin dal titolo del paragrafo, che è *La parabola, le equazioni di secondo grado o di grado superiore dal secondo,* abbinata però a un'introduzione della parabola come oggetto geometrico con riferimento all'opera di Apollonio e alla definizione della parabola come luogo, facendo menzione alla trasformazione del problema geometrico in problema algebrico nel passaggio al paradigma cartesiano. In questo capitolo si parte da un problema pratico di marketing, come si può osservare in fig. 4.

Ogni impresa mette in atto una serie di azioni di marketing, generalmente chiamate leve del marketing mix. Secondo la teorizzazione di Jerome McCarthy, le variabili classiche del marketing mix sono le cosiddette 4P.

- *Product*: prodotto mirato per il cliente;
- *Price*: prezzo adeguato in base al valore che il cliente attribuisce al prodotto;
- *Place*: canali distributivi efficaci per il raggiungimento e il sostegno del cliente;
- *Promotion*: organizzazione di attività di rinforzo alla qualità percepita dal cliente.

A queste leve se ne sono aggiunte altre tre.

- *People*: il concetto di marchio, la sua immagine e il target dei consumatori;
- *Process*: efficienza nei processi di fornitura del prodotto;
- *Physical evidences*: garanzia ai potenziali consumatori di acquisire recensioni e di poter esprimere il proprio grado di soddisfazione.

L'utilizzo di tutte o parte di queste 7 leve (le cosiddette 7P) contribuisce a stabilire le azioni di marketing in un certo periodo per ottenere uno standard di vendite stabilito.

› La matematica può aiutare a formulare strategie di marketing e a studiarne gli effetti?
Per scoprirlo, guarda il problema risolto a pagina 180.

Figura 4: Estratto da Consolini, Gambotto 2019

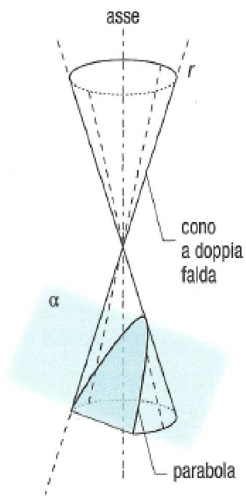
A seguire si presenta la parabola come oggetto geometrico associato a un particolare tipo di equazione quadratica (fig. 5).

Affrontiamo lo studio delle funzioni quadratiche del tipo $y = ax^2 + bx + c$ che danno luogo a parabole.

La parabola è una delle **sezioni coniche** e si ottiene intersecando un cono circolare retto a doppia falda con un piano parallelo a una delle generatrici del cono.

Il primo matematico a comprendere che la parabola, e altre figure chiamate coniche (circonferenza, ellisse, iperbole), potessero essere rappresentate sotto forma di sezioni piane di un cono fu Apollonio di Perga, un matematico greco vissuto nel III secolo a.C. Euclide incluse le coniche negli *Elementi* specificandone le proprietà.

In seguito, nel 1600, Cartesio mise in campo un nuovo approccio allo studio delle coniche basato sul riferimento cartesiano ortogonale: definì ciascuna conica come luogo geometrico e associò a ciascun luogo una equazione caratteristica. In questo modo lo studio delle coniche da problema geometrico si è trasformato in problema algebrico.



igura 4.1

DEFINIZIONE

La **parabola** è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto dato, detto **fuoco**, e da una retta data, detta **direttrice**.

In base alla definizione, preso un punto qualsiasi P della parabola, se indichiamo con F un punto fisso chiamato fuoco e con d una retta chiamata direttrice, allora $PF \cong PH$. Se consideriamo un altro punto qualsiasi, per esempio Q, allora $QF \cong QK$.

Figura 5: Estratto da Consolini, Gambotto 2019

Il passaggio alla descrizione analitica, che sia esplicito o meno, dal punto di vista delle proprietà della parabola rilevanti nella trattazione del problema del moto parabolico in sé non cambia nulla, ma l'ingresso nel paradigma cartesiano influenza notevolmente e inevitabilmente dal punto di vista epistemologico e argomentativo la trasposizione didattica della dimostrazione condotta nei manuali di fisica, proprio per il fatto che la traiettoria del moto del proiettile sia parabolica. Infatti la geometria analitica, soprattutto nella sua versione trasposta nei libri di testo, non ha l'impostazione assiomatica che più naturalmente incorpora le strutture di spiegazione deduttiva. Anche quando c'è il riferimento alla contestualizzazione storica, questo non ha impatto sulla trasposizione didattica in quanto la versione dei saperi è comunque istituzionalizzata secondo la prospettiva dell'attualizzazione. Considerando il modo in cui la parabola viene introdotta come oggetto della geometria analitica nei libri di testo di matematica, il passaggio dall'impostazione di Galilei a quella analitica nei manuali di fisica può far incorrere nel rischio di una perdita della dimensione esplicativa e argomentativa in favore di un paradigma algebrico e procedurale.

A questo proposito è importante fare riferimento ad autori che nell'ambito della ricerca in didattica della matematica hanno già affrontato il problema della relazione tra l'adozione di un paradigma all'interno della disciplina, in ottica di classificazione, e l'uso del simbolismo algebrico nelle prassi argomentative e dimostrative.

Nella trasposizione disciplinare che si effettua generalmente nelle scuole, in matematica emerge infatti un'altra divisione interna che la separa nei domini algebra, geometria, analisi, statistica e così via (Boero *et al*. 2013). Secondo gli autori, questa divisione contribuisce non solo a suscitare difficoltà a livello didattico, ma anche a costruire negli studenti (e non solo) una visione che, oltre a essere cristallizzata e settoriale, è anche poco realistica. Nel tentativo di superare questo paradigma, gli autori hanno sfruttato l'adattamento di Morselli e Boero (2009) alla didattica della matematica riguardante il costrutto del "comportamento razionale" per le pratiche discorsive, proposto da Habermas, in particolare riguardo l'uso del linguaggio algebrico nelle dimostrazioni.

L'introduzione artificiosa dell'algebra come ambito separato dalla geometria e da altre aree del sapere matematico fa sì che gli studenti abbiano difficoltà a utilizzare il linguaggio algebrico nelle dimostrazioni, pensate prevalentemente nella scuola secondaria come dominio della geometria sintetica, portando a un cambio radicale delle forme di spiegazione nel momento in cui si passa dalla geometria all'algebra. Questa tendenza si riscontra nei libri di testo di matematica analizzati e rappresenta il sapere di riferimento degli studenti in matematica; a questo sapere faranno riferimento pensando alla parabola e alla sua equazione in fisica.

Il riferimento alla fisica nei libri di testo di matematica quando si parla della parabola è raro, talvolta appare negli esercizi e spesso ha solo finalità aneddotica. Un esempio è quello del testo seguente:

Dagli specchi ustori all'antenna radiotelescopica

Una leggenda risalente a Plutarco narra che Archimede nel III secolo avesse incendiato le navi dei Romani che assediavano Siracusa con degli specchi particolari: si trattava di specchi a forma di parabola che riflettevano in un solo punto tutti i raggi del sole ricadenti sulla loro superficie; così facendo si otteneva una temperatura sufficientemente elevata da incendiare il legno con il quale erano costruite le navi romane.

L'idea alla base della costruzione dello specchio ustorio è che nella parabola esiste un punto, detto fuoco, tale che i raggi del sole che provengono dall'infinito (sono delle rette parallele), riflettendosi sulla parabola, finiscono in esso.

I grandi telescopi e le antenne paraboliche con le quali si ricevono le trasmissioni televisive dai satelliti agiscono secondo questo principio: i segnali che giungono sono praticamente paralleli, viste le distanze; rimbalzano sull'antenna e vengono concentrati sul ricevitore, posto nel fuoco, condensando i segnali, altrimenti deboli.

Definizione Si definisce **parabola** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da una retta fissa, detta **direttrice** e da un punto fisso detto **fuoco**.

Figura 6: Estratto dal libro di testo di matematica Paletta 2006

Come si può osservare, non c'è alcuna relazione tra il caso presentato e la definizione proposta.

5.1.2. La parabola e l'intreccio matematica-fisica nei manuali di fisica

Passando alle trattazioni più comuni e alla relazione matematica-fisica nel caso del moto parabolico, si può notare che l'impatto della trasposizione della parabola come oggetto della geometria analitica e dell'adozione implicita del paradigma epistemologico in matematica che soggiace all'uso dell'algebra e delle derivazioni basate sulla sostituzione di variabili nei sistemi di equazioni è effettivamente osservabile nei manuali di fisica osservati. Vediamone alcuni esempi estrapolati dai testi selezionati.

In Pugliese Jona (1984) si fa riferimento ai nodi epistemologici fisici della trattazione galileiana, anche se si parte da un esempio attualizzato:

> Un corpo lanciato in aria si muove, in generale, lungo una traiettoria curva: la figura 30 è stata copiata da una fotografia multiflash di una palla lanciata in aria di direzione obliqua. Cerchiamo di capire come si svolge il moto facendo alcune misurazioni sulla figura.

> Innanzitutto: il modo della palla può essere considerato come se fosse composto dalla *sovrapposizione* di due moti: *un moto verticale* ed *un moto orizzontale*[9] (Pugliese Jona 1984: 219).

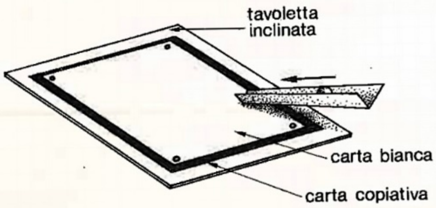
Si prosegue nella trattazione facendo riferimento alla traiettoria del moto, partendo da un esperimento molto simile a quello proposto da Galilei nella giornata seconda (che non è stato analizzato in quanto non è chiave il legame interdisciplinare con la matematica), riferendosi anche alla proprietà geometrica caratteristica della parabola in una forma molto simile a quella galileiana (proporzionalità quadratica) come si nota nella fig. 7. A questo punto si afferma che, tracciando opportunamente degli assi cartesiani sul foglio, si possono osservare le traiettorie sono parabole. Si fa dunque l'annunciato ingresso nel paradigma cartesiano. Risulta interessante ora confrontare la trattazione con quella di Galilei per capire quali differenze ci siano a livello epistemologico e argomentativo e che impatto abbiano sulla relazione di interdisciplinarità. Intanto la spiegazione del perché le traiettorie siano parabole è presentata come curiosità per il lettore. L'impostazione della spiegazione è in una prima fase molto simile a quella del testo storico, ma nel momento in cui si passa alle equazioni si effettua una sostituzione che porta all'eliminazione del parametro temporale e viene liquidato in poche righe, senza ulteriore spiegazione, il motivo per cui la proporzionalità quadratica dimostra che la traiettoria è parabolica, che è al cuore della dimostrazione di Galilei. Al di là del paragone col testo storico, si può notare come la spiegazione perda il carattere di dimostrazione e il ruolo argomentativo che aveva per mostrare il ruolo strutturale della matematica.

[9] Le citazioni riportano corsivi e grassetti propri del testo dal quale sono tratte.

Un'ulteriore analisi della traiettoria della palla mostra che la sua forma è parabolica. Questo fatto può essere da te verificato riferendo la curva che rappresenta la traiettoria ad una coppia di coordinate spaziali cartesiane aventi l'origine nel suo punto più alto e l'asse verticale che punta verso il basso, coincidente con l'asse di simmetria della curva. La curva è una parabola se, chiamando x le ascisse (orizzontali) dei punti della traiettoria e y le loro ordinate (verticali), risulta che i valori di y sono direttamente proporzionali ai quadrati dei valori di x.

Traiettorie paraboliche come quella della figura 30 si ottengono ogni volta che un moto uniforme si combina con un moto uniformemente accelerato, ad angolo retto tra loro. Ciò avviene anche quando una biglia rotola obliquamente su un piano inclinato, se l'attrito è trascurabile. Un semplice esperimento ti permetterà di verificare questo fatto.

Registra le traiettorie paraboliche di una sferetta d'acciaio che farai rotolare obliquamente su una tavoletta di legno inclinata, su cui avrai fissato un foglio di carta copiativa con la parte inchiostrata verso l'alto, con sopra un foglio di carta bianca. Puoi lanciare la sferetta sul piano facendola rotolare giù da una guida ottenuta piegando una striscia di cartone nel senso della lunghezza (fig. 31).



Tracciando opportunamente degli assi cartesiani sulle traiettorie registrate, verifica che si tratta di parabole.

Figura 7: Estratto da Pugliese Jona 1984: 220

Nota. Forse sei curioso di sapere per quale ragione queste traiettorie sono proprio delle parabole. Eccola.

Se ci riferiamo alla palla della figura 30, si trova che essa si sposta orizzontalmente con velocità costante perché la resistenza del mezzo è trascurabile. Chiamiamo questa velocità v_x.

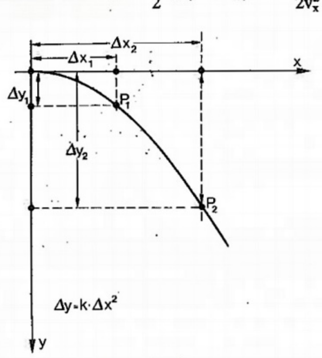
Lo spostamento verticale è invece uniformemente accelerato con accelerazione g.

Dopo un tempo Δt dall'istante in cui il corpo è passato per il punto più alto della sua traiettoria, i suoi spostamenti orizzontale e verticale valgono:

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{1}{2} g \, \Delta t^2$$

Se ricavi Δt dalla prima di queste espressioni e lo sostituisci nella seconda, trovi:

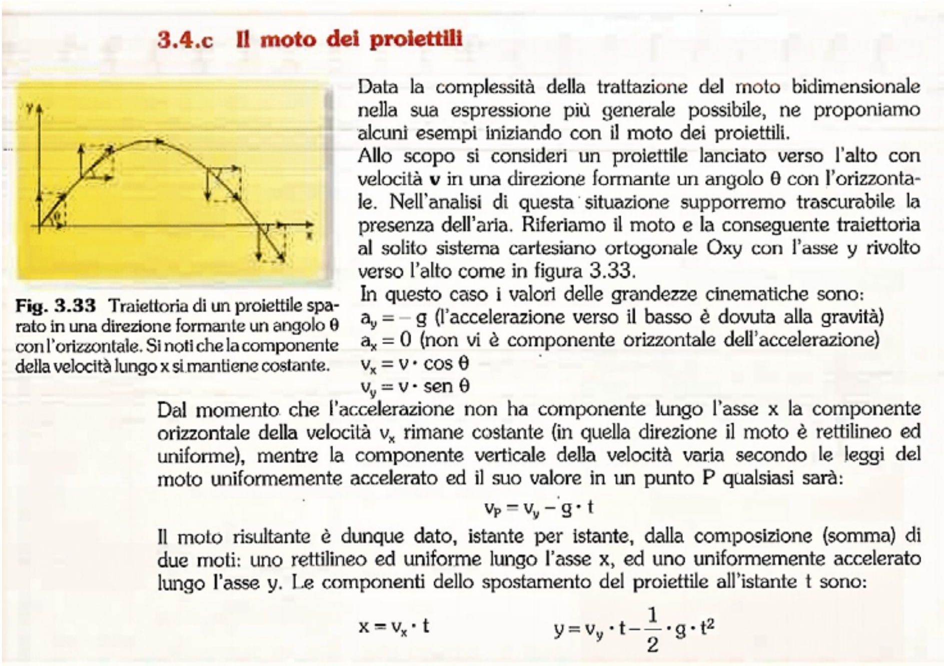
$$\Delta y = \frac{1}{2} g \, (\Delta x^2 / v_x^2) = \frac{g}{2 v_x^2} \Delta x^2 = \text{costante} \cdot \Delta x^2$$



Dunque lo spostamento verticale risulta proporzionale al quadrato dello spostamento orizzontale, e la traiettoria è proprio una parabola (fig. 32).

Figura 8: Estratto da Pugliese Jona 1984: 221

Passiamo all'analisi di un testo più recente, Cantelli 1998, di cui la fig. 9 mostra un estratto.



3.4.c Il moto dei proiettili

Fig. 3.33 Traiettoria di un proiettile sparato in una direzione formante un angolo θ con l'orizzontale. Si noti che la componente della velocità lungo x si mantiene costante.

Data la complessità della trattazione del moto bidimensionale nella sua espressione più generale possibile, ne proponiamo alcuni esempi iniziando con il moto dei proiettili.
Allo scopo si consideri un proiettile lanciato verso l'alto con velocità **v** in una direzione formante un angolo θ con l'orizzontale. Nell'analisi di questa situazione supporremo trascurabile la presenza dell'aria. Riferiamo il moto e la conseguente traiettoria al solito sistema cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y rivolto verso l'alto come in figura 3.33.
In questo caso i valori delle grandezze cinematiche sono:
$a_y = -g$ (l'accelerazione verso il basso è dovuta alla gravità)
$a_x = 0$ (non vi è componente orizzontale dell'accelerazione)
$v_x = v \cdot \cos\theta$
$v_y = v \cdot \mathrm{sen}\,\theta$
Dal momento che l'accelerazione non ha componente lungo l'asse x la componente orizzontale della velocità v_x rimane costante (in quella direzione il moto è rettilineo ed uniforme), mentre la componente verticale della velocità varia secondo le leggi del moto uniformemente accelerato ed il suo valore in un punto P qualsiasi sarà:

$$v_P = v_y - g \cdot t$$

Il moto risultante è dunque dato, istante per istante, dalla composizione (somma) di due moti: uno rettilineo ed uniforme lungo l'asse x, ed uno uniformemente accelerato lungo l'asse y. Le componenti dello spostamento del proiettile all'istante t sono:

$$x = v_x \cdot t \qquad y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Figura 9: Estratto da Cantelli 1998: 83

Già dall'inizio si nota un'impostazione molto diversa e pienamente collocata all'interno di una descrizione analitica della traiettoria del moto dei proiettili (che non vengono definiti) in un sistema di riferimento rappresentato da assi cartesiani; il riferimento al moto è fatto attraverso le equazioni delle leggi orarie, le grandezze cinematiche sono presentate come variabili e descritte attraverso parametri ed equazioni che fanno uso della trigonometria. Il processo di matematizzazione è realizzato in maniera molto rapida attraverso una identificazione pressoché totale tra descrizione matematica e fisica del problema e il riferimento ai fenomeni è molto rapido. Dal punto di vista epistemologico e argomentativo, è evidente l'inversione tra principi e conclusioni dal punto di vista fisico: il fatto che il modo sia composizione di due moti è presentato come conseguenza (si noti il dunque) e non come premessa, come principio. La presentazione è fortemente orientata a preparare le sostituzioni di variabili che seguiranno e che si possono osservare nel seguito:

> Ricavando t dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene:
>
> $$y = \frac{Vy}{Vx}x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V^2x}$$
>
> Essendo V_x, V_y e g valori fissati in maniera univoca una volta definite le condizioni iniziali (si noti tra l'altro che V_y / V_x = tgθ) l'equazione può essere scritta come:
>
> $$y = b \cdot x - a \cdot x^2$$
>
> È immediato riconoscere che questa è l'equazione di una parabola. Dunque la traiettoria del proiettile ha forma parabolica (Cantelli 1998: 85).

I termini utilizzati rimandano al paradigma discusso in precedenza e la trattazione si discosta notevolmente da una prospettiva interdisciplinare e da un approccio esplicativo e dimostrativo; si trovano infatti *ricavando*, *sostituendo* e poi si conclude con *riconoscendo*. Nessuno di questi termini fa riferimento a forme tipiche della spiegazione e dell'argomentazione, né in fisica né in matematica.

Procediamo con l'analisi dal punto di vista matematico e fisico di un'altra trattazione ancora più recente, cioè quella del Caforio, Ferilli 2000.

Questa trattazione presenta alcuni riferimenti alla storia, e precisamente al testo storico preso in esame, ma con finalità che come vedremo, nonostante i possibili agganci, risultano sostanzialmente di natura aneddotica, in quanto la trattazione è di fatto declinata secondo criteri di attualizzazione, sia per quel che riguarda la matematica che la fisica. Si può notare nella fig. 10 come l'incipit sia dedicato al tema dell'indipendenza dei moti, nodo epistemologico chiave nel testo di Galilei. Il riferimento però non è chiaro dal punto di vista epistemologico, perché si parla genericamente del fatto che fu *messa in evidenza*, senza chiarire se postulata, dedotta, verificata sperimentalmente. Viene proposta una citazione dal testo storico già analizzato, ma, repentinamente e senza alcuna precisazione viene immediatamente fissato un sistema di assi cartesiani e si procede a una trattazione analitica del problema, scevra di attenzioni epistemologiche sia matematiche che fisiche.

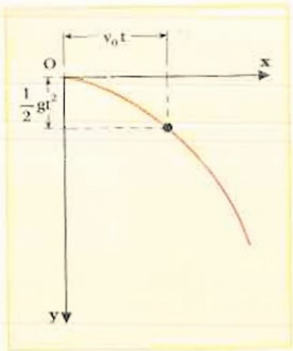


Figura 20. Un grave lanciato orizzontalmente descrive una traiettoria parabolica con asse verticale.

In termini equivalenti possiamo affermare che *un corpo soggetto a due movimenti simultanei dopo un tempo* t *occupa la stessa posizione che occuperebbe se avesse seguito i due movimenti successivamente l'uno all'altro.*

4.2 Traiettoria parabolica dei proiettili

L'indipendenza del movimento verticale da quello orizzontale nel moto di un proiettile fu messa in evidenza da Galileo nei *Discorsi intorno a due nuove scienze* (IV giornata).

Ecco infatti come Galileo fa concludere al suo interlocutore Sagredo: "Non si può negare che il discorso sia nuovo, ingegnoso e concludente, argomentando ex supposizione, supponendo cioè che il moto trasversale si mantenga sempre equabile, e che il naturale deorsum parimenti mantenga il suo tenore, d'andarsi sempre accelerando secondo la proporzione duplicata dei tempi, e che tali moti e le loro velocità, nel mescolarsi, non si alterino perturbino ed impedischino, sì che finalmente la linea del proietto non vadia, nella continuazione del moto, a degenerare in un'altra spezie".

Fissato un sistema di assi cartesiani con l'origine O nel punto di lancio del proiettile, l'asse x orizzontale orientato nel verso della velocità di lancio $\vec{v}_0$ e l'asse y verticale orientato verso il basso (fig. 20), generalizzando quanto abbiamo osservato nell'esperimento di simulazione, se g è l'accelerazione di gravità, le componenti della velocità del proiettile sono:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = g t \end{cases}$$

27

Figura 10: Estratto da Caforio, Ferilli 2000: 136

Segue una trattazione identica a quella del manuale di Cantelli, basata su leggi ricavate tramite sostituzione e si procede poi alla riflessione sul tipo di curva ottenuta quando la relazione analitica è di tipo quadratico, che è una parabola.

Ultimo esempio che analizziamo è quello del Cutnell *et. al.* 2017.

3 IL PRINCIPIO DI COMPOSIZIONE DEI MOTI

Consideriamo il moto di un punto materiale nel piano. Fissato un sistema di coordinate cartesiano, il moto del punto materiale può essere scomposto in due moti **indipendenti** l'uno dall'altro, uno lungo la direzione x, l'altro lungo la direzione y. Il moto del punto materiale è così descritto da un vettore posizione che varia nel tempo di componenti $x(t)$ e $y(t)$, che sono rispettivamente le leggi orarie delle proiezioni del punto sui due assi coordinati.

Per i moti nel piano è valido dunque il *principio di composizione dei moti*: nei moti in due dimensioni, lo **spostamento totale** è la somma vettoriale degli spostamenti che avvengono in ognuna delle due dimensioni:

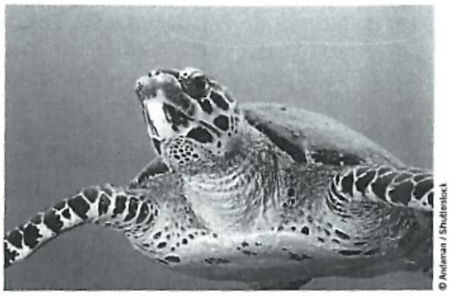
$$\vec{s}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$$

Figura 11: Estratto da Cutnell *et al.* 2017: 23

Il testo parte dal principio di scomposizione dei moti in moti indipendenti, che non viene presentato come principio ma come possibile descrizione del moto di un generico punto materiale, che viene subito presentato in termini analitici facendo riferimento a leggi orarie. Il principio di composizione viene matematizzato e trasformato rapidamente in regola da applicare alla somma vettoriale degli spostamenti. Segue subito un esempio in forma di esercizio, riportato nella fig. 12.

Esempio 7 Scomposizione del moto

Una tartaruga marina viene seguita nel suo percorso migratorio con un rilevatore GPS. La tartaruga si sposta ogni giorno di 40 km verso nord e di 20 km verso ovest. Considera un sistema di riferimento con l'asse x in direzione ovest-est, l'asse y in direzione sud-nord e l'origine nella spiaggia di partenza.



- ► Scrivi le equazioni del moto delle componenti x e y.
- ► Ricava l'equazione della traiettoria.
- ► Determina la distanza dalla posizione di partenza dopo 6 giorni di viaggio.

Figura 12: Estratto da Cutnell *et al.* 2017: 24

Il moto del proiettile viene poi presentato come caso particolare, seguendo l'approccio già illustrato nelle precedenti trattazioni (fig. 13).

4 MOTI IN DUE DIMENSIONI: IL MOTO DEL PROIETTILE

Il moto di un punto materiale di massa m, lanciato con una certa velocità iniziale v_0 e soggetto alla sola azione della forza di gravità, è detto **moto del proiettile.**

Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo al suolo e l'asse y perpendicolare al suolo e diretto verso l'alto. Il principio di composizione dei moti consente di descrivere il moto del proiettile come la composizione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x e di un moto uniformemente accelerato con accelerazione costante $-g = -9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ lungo l'asse y.

Indichiamo con x_0 e y_0 le componenti della posizione iniziale del proiettile e con v_{0x} e v_{0y} le componenti della sua velocità iniziale; le leggi orarie sono:

$$\vec{s}(t) \rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) \rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) \rightarrow \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$$

Determiniamo l'equazione della traiettoria dalle leggi orarie della posizione, eliminando il parametro tempo; l'equazione cartesiana della traiettoria che si ottiene è quella di una parabola:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$$

Figura 13: Estratto da Cutnell *et al.* 2017: 27

5.1.3. Confronto tra le trattazioni nei manuali di fisica

Intanto si osserva, come tendenza complessiva, che nei libri di testo di fisica c'è un maggiore scollamento, nei testi più recenti, tra la parte tecnica e procedurale delle formule e il discorso argomentativo fisico, ove presente, che lega i principi alla fenomenologia. La matematica nella trasposizione disciplinare attualizzata del problema della traiettoria del moto dei proiettili sembra aver perso il suo ruolo esplicativo strutturale in fisica, o quantomeno manca l'esplicitazione di questo ruolo. Non c'è dunque solo un cambio di teorie matematiche di riferimento, di oggetti e di definizioni con l'obiettivo, senz'altro ragionevole, di attualizzare almeno parzialmente la trattazione e adattarla al contesto istituzionale attuale della scuola secondaria. In queste trasposizioni, soprattutto nelle ultime tre, sembra che il cambio di strumenti porti con sé un cambio di paradigma che finisce per alterare notevolmente la visione sia della matematica come disciplina che della sua relazione con la fisica e del suo ruolo nella costruzione del discorso scientifico.

Come vedremo questo porta con sé anche una organizzazione testuale e scelte lessicali e sintattiche dei libri di testo molto diverse da quelle del testo di Galilei, che non dipendono solo dal diverso contesto storico di riferimento.

5.2. Un confronto comparativo tra manuali di fisica da un punto di vista linguistico

L'analisi è stata svolta mettendo a confronto i manuali di fisica adottati nella scuola italiana dagli anni Ottanta ad oggi, analizzati nel paragrafo precedente in ottica disciplinare, con l'obiettivo di osservare e valutare le strategie linguistiche adottate dagli autori.

L'analisi condotta con gli strumenti presentati nel quadro teorico ha dato come esito più rilevante il fatto che i manuali si somigliano (sebbene pure si presenti qualche piccola differenza) soprattutto rispetto a tre punti rilevanti ai fini di una riflessione sulla trasposizione didattica, che sono tra loro correlati e che possiamo riassumere come segue:

1. la quantità informazione[10];
2. la presentazione dell'informazione;
3. l'*engagement* del destinatario.

5.2.1. La quantità di informazione

La maggior parte dei manuali esaurisce l'argomento del moto del proiettile in uno o due paragrafi a cui sono associati alcuni esempi svolti (da un minimo di uno a un massimo di tre esempi). La quantità di informazione esplicita è poi molto limitata a causa della riduzione della trattazione dell'argomento a un solo paragrafo; ciò impone che gran parte del contenuto informativo venga spesso lasciato in implicito, imponendo al lettore di fare inferenze attraverso il proprio bagaglio di conoscenze; a volte l'autore sembra rifiutarsi addirittura di affrontare la trattazione, perché ne presuppone la complessità. Si osservi il seguente estratto:

> Data la complessità della trattazione del moto bidimensionale nella sua espressione più generale possibile, ne proponiamo alcuni esempi iniziando con il moto dei proiettili (Cantelli 1998: 83)[11].

Nel brano si dà per scontato che la trattazione sia complessa, senza darne però una motivazione: ciò potrebbe indurre lo studente a un atteggiamento negativo verso lo studio del fenomeno, che può realizzarsi come sfida nel caso migliore o come disinteresse nel caso peggiore. Inoltre, affermando che il moto del proiettile sia un'espressione particolare del moto bidimensionale, si porta il lettore a inferire che il primo non sia l'unica espressione del secondo, senza però fornire ulteriori spiegazioni al riguardo lungo il paragrafo. Il messaggio finisce così col risultare *mozzato* e non facilmente comprensibile per chi non abbia già una vasta conoscenza sul tema oggetto di trattazione.

[10] Con *quantità* non ci riferiamo a un'analisi quantitativa dei manuali. Ulteriori indagini quantitative al riguardo potranno essere sviluppate in altri lavori.
[11] Anche in fig. 10.

Una caratteristica condivisa da tutti i manuali è inoltre l'assenza di informazioni su quando e come il moto del proiettile sia stato considerato in fisica, tralasciando dunque il quadro epistemologico e storico nella sua trattazione. L'unico riferimento a Galileo Galilei si trova nel manuale di Caforio e Ferilli, che cita un passo della quarta giornata dei *Discorsi intorno alle due nuove scienze*. Tuttavia, il rimando risulta fine a sé stesso, non è commentato e non sembra facilitare la comprensione.

Infine, in tutti i manuali la definizione del proiettile viene data per scontata, anzi esso viene chiamato alternativamente *proiettile* e *corpo lanciato in aria* senza distinzione di significato.

5.2.2. La presentazione dell'informazione

Molti manuali adottano un'impostazione strettamente deduttiva: si parte con l'enunciazione del problema del moto del proiettile come esempio di moto bidimensionale, si prosegue con la derivazione matematica formale e poi si conclude con l'osservazione delle esemplificazioni. Da questo punto di vista i manuali si distanziano molto dal testo di Galilei, in cui lingua naturale, concetti matematici e figura si intrecciano in maniera coerente, coadiuvando il lettore nel processo di osservazione, riflessione e comprensione del fenomeno con una progressione graduale attraverso codici diversi. Un tentativo in questa direzione è stato fatto da Pugliese Jona (1984) che, nel paragrafo dedicato al moto, parte proprio dall'osservazione della figura per avviare la spiegazione. Tuttavia, gran parte dell'informazione è lasciata al ragionamento autonomo del lettore, attraverso una serie di domande dirette, che rimangono però senza risposta nell'immediato:

> Disegnando sulla figura con una matita a punta fine un reticolato di linee verticali e orizzontali passanti per il centro di ogni immagine della palla, puoi facilmente analizzare separatamente i due moti. Com'è il moto verticale della palla? Qual è la forza responsabile di questo tipo di moto?
> Com'è il suo moto orizzontale? Che cosa si può dunque dire a proposito delle forze che agiscono sulla palla in direzione orizzontale?
> Un'ulteriore analisi [...] (Pugliese Jona 1984: 217-218).

La soluzione ai quesiti è solo successiva, dopo la richiesta di sperimentare tramite una sferetta d'acciaio e una tavoletta di legno il moto parabolico. Il discorso finisce con il rimanere sospeso: le risposte non sono direttamente collegate alle domande e solo i più attenti lettori possono ricollegare i due pezzi di informazione del paragrafo.

Gli altri manuali tendono invece alla narrazione di esempi, rinviando alla figura solo marginalmente: Caforio e Ferilli la richiamano solo tra parentesi; Cantelli lo fa a fine paragrafo, affidando al disegno il compito di raffigurare quanto già detto, quale conferma visiva.

5.2.3. L'*engagement* del destinatario

Un'altra caratteristica fondamentale dei manuali riguarda il tipo di richiesta di partecipazione rivolta al lettore.

Nella parte delle dimostrazioni di quasi tutti i testi analizzati, si riscontrano processi di inclusione del destinatario, ovvero di condivisione delle soggettività di chi scrive e chi legge in un unico processo, attraverso l'uso di verbi alla prima persona plurale (*consideriamo*, *possiamo*, *scegliamo*, *scomponiamo*, ecc.); in molti casi, tuttavia, questi espedienti sembrano essere più il retaggio della scrittura dimostrativa e divulgativa[12], che una vera e propria richiesta di partecipazione alla riflessione scientifica che conduce l'autore. Solo in Pugliese Jona 1984 compare anche la seconda persona singolare, con un valore quasi conativo, con la quale si invita chi legge a verificare quanto scritto e attraverso alcuni esperimenti:

> Questo fatto può essere da te verificato [...]. Registra le traiettorie paraboliche di una sferetta d'acciaio che farai rotolare obliquamente su una tavoletta di legno inclinata (Pugliese Jona 1984: 220).

L'unico testo in cui non vi è alcun tipo di richiesta esplicita è il manuale di Cantelli 1998, nel quale si trova esclusivamente l'uso del costrutto impersonale tipico della scrittura scientifica più formalizzata dei tecnici, anche nella richiesta di risoluzione degli esercizi (*Si risolva*).

5.3. Confronto tra analisi matematica, fisica e linguistica

In sintesi, dall'analisi è emersa fin da subito una notevole differenza tra i libri di testo e il discorso storico-epistemologico portato avanti nel testo di Galilei sul moto parabolico, con una differenza molto maggiore nei testi più recenti analizzati. Si osserva in particolare che:

1. non sono esplicitati nei testi di fisica né i rimandi ai concetti matematici, alle teorie di riferimento e alla matematizzazione dei processi, che vengono dati per scontati - si noti ad esempio come venga formulato il problema in forma cartesiana collocando il fenomeno in un sistema di assi coordinati senza alcuna spiegazione; non appaiono nemmeno riferimenti a forme tipiche del pensiero matematico. A livello testuale, il riferimento geometrico è presente soltanto nel manuale di Cantelli, ma è funzionale solo a spiegare alcune figure e molti dei concetti matematici rimangono impliciti. Quando i principi fisici vengono nominati, molto di rado vengono messi in coerenza con la matematizzazione proposta e usati in modo significativo nella spiegazione fisica. I nodi epistemologici non sono quasi mai esplicitati nei testi, ma lasciati all'inferenza

[12] Sull'uso del *noi*/*voi* nei testi divulgativi, cfr. Gualdo, Telve 2015: 197.

di chi legge. Viene da pensare che, in questi casi, il destinatario diretto del manuale sia il docente piuttosto che lo studente: quest'ultimo, infatti, difficilmente sarà in grado di attivare in maniera autonoma, comprendere i legami tra fisica e matematica veicolati in maniera implicita nel testo e di assumere una sicura consapevolezza interdisciplinare che gli permetta di comprendere appieno la struttura epistemologica della disciplina.

2. Nei libri di testo di fisica, la matematica sembra assumere principalmente un ruolo strumentale, ovvero è utilizzata principalmente come strumento algebrico per il calcolo; in tutti i manuali viene meno il ruolo epistemologico centrale della dimostrazione, che struttura la relazione interdisciplinare in Galilei.

3. La struttura argomentativa dei testi è molto difficile da evidenziare, in quanto le frasi sembrano costruite più per trasmettere informazioni piuttosto che argomentare.

4. Da un punto di vista linguistico, i testi non riescono a esplicitare sufficientemente il ragionamento interdisciplinare alla base dello studio dei fenomeni trattati.

5. Dal punto di vista dei contenuti, la matematica finisce con l'essere presentata esplicitamente quasi soltanto come formula

Si osservi che anche la dimostrazione della traiettoria come parabola rimane spesso e in gran parte in implicito: ciò accade in Cantelli 1998 (come visto nel § 5.2.1.) , come pure in altri manuali, per esempio in quello di Caforio e Ferilli 2000:

> È immediato riconoscere che questa è l'equazione di una parabola. Dunque la traiettoria del proiettile ha forma parabolica (Cantelli 1998: 85).

> La precedente è l'equazione di una parabola avente come asse di simmetria quello delle *y*. Possiamo perciò affermare che il moto di un proiettile sparato orizzontalmente è di tipo **parabolico** (Caforio, Ferilli 2000: 137).

In tutte e due le esemplificazioni, con una sola frase si afferma che il moto del proiettile assume la forma di una parabola, ma in nessuna delle due lo si dimostra in maniera esplicita, forse anche a causa di motivi puramente editoriali. La scelta didattica (o editoriale) sembra però far venir meno un principio fondamentale che riguarda la scienza e quindi il linguaggio scientifico, come ricordato già da Tullio De Mauro, che non dovrebbe venire totalmente meno in testi dedicati all'educazione e all'apprendimento delle discipline:

> un linguaggio scientifico non è solo fatto di parole, simboli, termini specifici: è fatto bensì di ciò, ma in quanto questi elementi riescano a connettersi in sequenze che vanno lette come istruzioni, ordini chiari, e chiari perché costruiti con parole di accezione ben predeterminata o regolarmente deducibile a parole predeterminate. Ordini chiari per un fare ordinato, cioè replicabile e sempre

> produttivo di certi risultati, sensibilmente costanti alla misurazione e al permanere di certe condizioni (De Mauro 1988: 17).

6. Analisi da un punto di vista matematico, fisico e linguistico del manuale universitario *Fondamenti di Fisica* di Walker

6.1. Analisi da un punto di vista matematico e fisico

Alla luce della precedente analisi, per non limitarsi al confronto tra testo storico e manuali solo in termini di differenze quasi incolmabili, siamo andati alla ricerca di un manuale che consentisse di effettuare un confronto in termini di contestualizzazione e attualizzazione dei saperi e trasposizione didattica interdisciplinare con il testo di Galilei ma che condividesse con esso alcuni degli elementi essenziali della trattazione interdisciplinare presentata nei *Discorsi e dimostrazioni*. Un buon candidato per questa analisi è risultato essere un manuale universitario, in particolare la quinta edizione *Physics* di James S. Walker (2017) e la sua traduzione italiana *Fondamenti di Fisica* (2020), a cura di Giovanni Organtini e pubblicato da Pearson Italia. Questo libro di testo non è pensato per studenti di scuola secondaria di secondo grado, ma ci è sembrato particolarmente adatto all'analisi per diversi motivi: nel quarto capitolo del testo, dedicato alla cinematica bidimensionale, il moto del proiettile assume il ruolo principale ed è ampiamente studiato e trattato; l'indipendenza dei moti viene introdotta e discussa sotto molteplici prospettive; da un primo studio gli argomenti sono sembrati solidi e strutturati e il testo è apparso coerente[13].

Di seguito presentiamo brevemente l'analisi disciplinare e interdisciplinare realizzata (ripresa da Gombi, 2020), condotta da diverse prospettive:

- struttura;
- concetti fondamentali e nodi epistemologici;
- spiegazione e argomentazione.

L'analisi non si propone di risultare dettagliata, ma ha il solo scopo di evidenziare gli aspetti che lo rendono questo manuale quello che più si avvicina all'impostazione autentica del testo storico, pur non rappresentando una trattazione pensata per la scuola secondaria.

[13] Uno dei revisori ci ha fatto notare come la coerenza sia forse dovuta alla struttura argomentativa ed espositiva della tradizione manualistica anglosassone dell'originale, diversa da quella italiana. È vero, tuttavia, che il manuale di Cutnell *et al.* deriva dalla stessa tradizione, eppure non presenta la stessa struttura argomentativa adottata da Walker.

Per quanto riguarda la struttura, il quarto capitolo, intitolato *Cinematica bidimensionale*, è diviso in cinque paragrafi. La trattazione teorica dell'argomento è alternata da numerosi esempi guidati. In tab. 1 riportiamo la trattazione e i principali argomenti dei cinque paragrafi.

Paragrafo	Contenuto
1°	L'indipendenza dei moti è presentata al lettore attraverso l'immagine di una "tartaruga" che si muove in uno spazio virtuale bidimensionale. L'indipendenza dai moti viene introdotta mostrando l'analogia tra due procedure: il calcolo della distanza percorsa dalla tartaruga come $d = v \cdot t$ lungo la sua retta e il calcolo delle componenti della distanza lungo x e y proiettando la distanza vettoriale sull'asse. Lo stesso risultato si ottiene proiettando prima la velocità del vettore sui due assi e quindi calcolando le distanze percorse lungo x e y. Il fatto che i due risultati siano in accordo porta l'autore a concludere: «Per riassumere, possiamo pensare al movimento effettivo della tartaruga come una combinazione di movimenti x e y separati» (Walker 2017:.89). Questo esempio viene utilizzato anche come punto di partenza per dedurre le equazioni del moto nel caso generale, per un oggetto che si muove in due dimensioni.
2°	Sviluppa il modello fisico del moto del proiettile come un'applicazione dell'indipendenza del moto. Viene quindi modellizzato il concetto di proiettile come inteso in fisica e vengono stabilite le ipotesi di partenza: In particolare, l'autore fa luce sulla possibilità di trascurare la rotazione terrestre e la resistenza dell'aria. Queste ipotesi vengono incorporate nelle equazioni generali del moto dedotte nel secondo paragrafo, ottenendo così le equazioni per il caso del moto del proiettile. La sezione si conclude con un "esperimento mentale". L'esperimento illustra l'indipendenza dei moti in una situazione di reale.
3°	Discute il caso in cui la velocità iniziale del proiettile sia completamente orizzontale. In particolare, i risultati ottenuti vengono utilizzati per dimostrare algebricamente che la traiettoria dell'oggetto è parabolica. L'ultima sezione è dedicata all'ottenimento dell'espressione matematica per il calcolo del punto di atterraggio.
4°	È dedicato alla deduzione delle equazioni generali del moto del proiettile.
5°	Il quinto e ultimo paragrafo è dedicato alla deduzione delle espressioni matematiche per l'intervallo e l'intervallo massimo. Soprattutto, l'autore dedica una sezione completa allo studio delle simmetrie nel moto del proiettile. Più specificamente, vengono presentate le proprietà delle simmetrie riguardanti il tempo di volo, i vettori di velocità a una data altezza e la gittata del proiettile.

Tabella 1: Sintesi in paragrafi del quarto capitolo del Walker 2017

Si può osservare che:

- il moto del proiettile viene definito solo una volta chiarito il concetto generale di moto bidimensionale di un oggetto e illustrata l'indipendenza dei moti;
- le ipotesi fisiche e le ipotesi sul moto del proiettile sono esplicitate e precedono la deduzione delle equazioni del moto;
- la forma parabolica della traiettoria non viene subito trattata, ma è discussa solo quando può essere dimostrata matematicamente.

Infine, emerge che l'idea principale del capitolo è che i movimenti orizzontale e verticale sono indipendenti. Questo fatto rappresenta il filo conduttore della discussione, come afferma lo stesso autore nell'introduzione del capitolo. In effetti, mostrare l'indipendenza dei movimenti è il primo passo per dedurre le equazioni generali del moto per una particella puntiforme che si muove in due dimensioni e costituisce anche uno dei presupposti fondamentali necessari per creare il modello matematico del moto del proiettile.

L'oggetto fisico centrali nel discorso è il *proiettile* ed è definito rigorosamente e la definizione combina aspetti percettivi, azioni che giustificano l'etimologia del nome e le uniche proprietà che contano e che lo collocano in una "rete inferenziale", cioè un sistema di legami con altri fenomeni e la loro spiegazione Vi sono poi quegli oggetti la cui definizione non è esplicita ma deve essere dedotta dal discorso: per esempio i concetti di *moto bidimensionale* e *traiettoria parabolica*. Quest'ultima nel paragrafo 3 è ricavata attraverso una derivazione algebrica, come nel caso delle trattazioni dei manuali. Oltre ai concetti fisici, dal testo emergono alcuni nodi epistemologici che erano chiave anche nel testo galileiano. Ne sono stati individuati due: *l'indipendenza dei moti orizzontali* e *verticali*, filo conduttore del capitolo, e la *simmetria*.

Per quanto riguarda la spiegazione, il testo guida il lettore attraverso un ragionamento complessivo, seguendo il concetto di scomposizione dei moti. In particolare, la conoscenza viene progressivamente costruita sfruttando diversi approcci metodologici, tipici della ricerca fisica.

L'esperimento di fisica come metodo fondamentale per produrre conoscenza e in particolare per testare una congettura è sicuramente difficile da trattare su un libro di testo. Tuttavia, nel capitolo sono incluse varie simulazioni. Inoltre, la dimensione fenomenologica dell'esperimento è attivata dalle numerose immagini di vita reale presenti nel capitolo, la cui funzione principale è quella di convincere il lettore dell'attendibilità delle conclusioni ottenute (Gombi 2020: 43).

Interessante notare come l'argomentazione sia strutturalmente diversa rispetto a quella di una dimostrazione derivata da principi e assunzioni. Il discorso è costruito in modo tale da mostrare la dipendenza delle formule derivate formalmente da principi ma anche, al tempo stesso, la relazione tra i principi e l'esperienza e la credibilità delle assunzioni.

L’analisi interdisciplinare fornisce strumenti per comprendere il ruolo giocato dalla matematica in diverse strutture argomentative e in particolare nel confronto tra la dimostrazione di Galilei e l’argomentazione di Walker.

Per quanto riguarda la struttura argomentativa, tende a essere affrontata in modo più implicito; inoltre, la parola *dimostrare* è usata in modo improprio e la struttura argomentativa non emerge chiaramente. L’intento dell'autore è fornire «una semplice dimostrazione» dell'indipendenza dei moti orizzontali e verticali nel moto del proiettile; quindi, il movimento del proiettile è qui utilizzato per dimostrare l'indipendenza dei moti. Tuttavia, nelle prime righe del paragrafo, il moto del proiettile è presentato come un’applicazione dell'indipendenza dei moti. Pertanto, se consideriamo la struttura logica dell'argomento addotto nel secondo paragrafo, dall'indipendenza dei moti stiamo passando all'indipendenza stessa in modo circolare (che si può percorrere entrando in una sorta di *loop*). In ogni caso, come abbiamo sottolineato durante l'analisi del paragrafo, non stiamo dimostrando l'indipendenza nel senso rigoroso del termine; ciò significherebbe dedurlo da un insieme fisso di assiomi prestabiliti attraverso l’uso delle regole della metateoria. In questo caso, si sta guardando il mondo fisico e cercando una correlazione con il modello ideale, mostrando che esiste una relazione effettiva. Quindi, se guardiamo alla struttura epistemologica dell'argomento, il moto del proiettile viene utilizzato per arrivare a una nuova giustificazione dell'indipendenza del moto dalla dimensione fenomenologica. Solo considerando questo passaggio dall'ideale al fenomeno, il passo può essere visto corretto dal punto di vista argomentativo.

6.2. Analisi dal punto di vista linguistico

Il manuale di Walker differisce dagli altri manuali analizzati proprio nei tre punti chiave che abbiamo visto sopra. Infatti, diversamente dagli altri testi di scuola secondaria, il manuale di Walker riserva al moto parabolico un intero capitolo, distinto in cinque paragrafi, cinque esempi svolti e due guidati. Questi esempi guidati presentano una trattazione particolareggiata del loro svolgimento: oltre alle due sezioni della descrizione e soluzione del problema, che condivide con tutti gli altri manuali, si trovano anche quelle relative alla *strategia* da adottare, alle *osservazioni* che scaturiscono dalla sua risoluzione, e, infine, alla *prova* da svolgere per il lettore, che consiste in una domanda su un aspetto del problema, permettendo al ricevente di rielaborare quanto osservato fino ad allora e procedere all’applicazione di quanto appreso.

Walker tende a presentare perciò in esplicito una maggiore quantità di informazione, con spiegazioni molto più ampie rispetto agli altri manuali esaminati; non vengono tralasciati nemmeno quali siano i problemi relativi alla semplificazione nell’affrontare l’oggetto di studio:

> Quindi, negli esempi di moto di un proiettile considerati in questo capitolo, ignorando la variazione di g o la rotazione della Terra, compiamo errori molto piccoli (Walker 2020: 84).

I numerosi paragrafi permettono al lettore di progredire gradualmente nel processo di costruzione della sua conoscenza sul fenomeno.

La struttura del testo è oggetto stesso di riflessione proposta al lettore: l'autore non solo anticipa gli argomenti,[14] (*in questo capitolo estendiamo*), ma spiega anche come verranno essi verranno trattati (*ciò permetterà*, *l'idea di fondo del capitolo*, *questo capitolo applica*), fornendo una guida di lettura e di interpretazione che accompagna nello studio lo studente:

> In questo capitolo estendiamo lo studio della cinematica al moto in due dimensioni. Ciò ci permetterà di prendere in considerazione un numero maggiore di fenomeni fisici […]. Di particolare interesse è il moto del proiettile […]. L'idea di fondo del capitolo è molto semplice: il moto orizzontale e il moto verticale sono indipendenti. […] Questo capitolo applica l'idea dell'indipendenza dei moti a molti sistemi fisici comuni (Walker 2020: 79).

Vi è inoltre la tendenza a far dialogare maggiormente testo e figure nella presentazione dell'informazione: per la spiegazione si parte direttamente dalla figura e il testo diventa il luogo della riflessione e del commento della stessa, anche dal punto di vista matematico:

> Consideriamo queste ipotesi nelle equazioni del moto fornite nei paragrafi precedenti. Supponiamo, come in Figura 2, che l'asse x sia orizzontale (Walker 2020: 84).

Ciò che però lo rende diverso da tutti gli altri manuali è soprattutto la presenza della definizione della parola *proiettile*, di cui distingue il significato a seconda dell'uso, comune o specialistico. Essa si presenta dapprima nell'introduzione[15] dell'intero capitolo ed è poi recuperata all'interno del paragrafo 2:

> Ma che cosa intendiamo in fisica con il termine "proiettile"?
> Un proiettile è qualunque oggetto lanciato in qualsiasi modo e lasciato poi libero di seguire una traiettoria determinata soltanto dall'azione della gravità" (Walker 2020: 83).

[14] Questa, del resto, è una tendenza della scrittura divulgativa, anche a livello scolastico, dei manuali più recenti, cfr. Gualdo, Telve 2015[2011]: 197.

[15] «Quando sente la parola "proiettile" la maggior parte delle persone pensa a un'arma da fuoco. Il termine proiettile in realtà significa "qualcosa che si può proiettare, cioè lanciare" e quindi si può usare per indicare qualsiasi oggetto che si muove sotto l'influenza della sola forza di gravità» (Walker 2020: 29).

La distinzione del referente scientifico da quello comune delimita il punto di vista del lettore e crea le condizioni per cui possa immettersi consapevolmente nella prospettiva dell'osservazione fisica, scientifica, molto diversa dalla semplice percezione quotidiana del fenomeno trattato.

Se dunque gli altri testi di fisica analizzati tendono a trasferire le informazioni, al massimo invitando il lettore a verificare autonomamente e a mettere in pratica quanto scritto dall'autore, nel manuale di Walker si può osservare lo sforzo di creare un maggiore coinvolgimento del destinatario nell'osservazione dei fenomeni e nel ragionamento su di essi, soprattutto fornendogli indicazioni e strumenti attraverso cui costruire il quadro epistemologico per interpretare il fenomeno.

7. Prospettive future di lavoro

Le analisi condotte hanno permesso di comprendere meglio i motivi che rendono i testi storici, in particolare i *Discorsi* di Galilei, peculiari nell'esprimere i processi di produzione della conoscenza scientifica e mostrare al lettore gli aspetti epistemologici rispetto ai manuali disciplinari.

È emerso, infatti, come i manuali scolastici di fisica manchino di una struttura argomentativa stabile[16] (dipendenza dalle definizioni e dalla scelta del fenomeno da osservare, esplicitazione dell'obiettivo della trattazione, esplicitazione delle scelte di inquadramento teorico e distinzione tra nuove evidenze e assunzioni e conoscenze precedenti) e lascino implicito gran parte dell'inquadramento teorico e disciplinare, la cui identificazione e valorizzazione richiede una capacità di esplicitazione che non è sempre alla portata di un lettore non esperto.

Al contrario, pur con tutte le distinzioni del caso, il manuale di Walker risulta forse quello più vicino al percorso epistemologico stabilito da Galilei. Il quadro epistemologico viene realizzato in maniera più dettagliata e graduale rispetto agli altri manuali e lo studente viene accompagnato nel processo di costruzione della sua conoscenza specialistica attivando e disattivando tutti i possibili percorsi cognitivi che potrebbe compiere da solo.

Inoltre, nei manuali scolastici, linguaggio della matematica e della fisica risultano essere per lo più giustapposti, senza dar conto della loro relazione da un punto di vista epistemologico, contrariamente a quanto avviene nei testi storici, in cui le scelte linguistiche, in particolare di lessico, sono funzionali a una comunicazione che rispetti l'inquadramento teorico e lo renda di facile ricezione per il lettore.

[16] Sulla riduzione dell'argomentazione nei manuali disciplinari cfr. Cortelazzo 1994: 10-11; GISCEL Sardegna 1988: 269.

È vero però che anche Walker ogni tanto finisce con il prendere la stessa strada dei manuali. Nonostante vi sia un paragrafo dedicato alla traiettoria parabolica, infatti, questa viene solo presentata tramite un'equazione, ma non dimostrata diffusamente attraverso la geometria:

> Poi sostituiamo questo risultato nell'equazione y = ½ gt, eliminando t:
>
> $$y = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{y_o}\right)^2 = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$
>
> Osserviamo che y è un'equazione del tipo:
>
> $$y = a + bx^2$$
>
> in cui a = h = costante e b = -g/2vo2 = costante. Questa è l'equazione di una **parabola** con la concavità verso il basso e rappresentata la forma caratteristica della traiettoria del moto di un proiettile (Walker 2020: 88).

Il cambio di paradigma epistemologico di riferimento in matematica che caratterizza la trasposizione dal sapere storico del testo galileiano alla versione del problema del moto parabolico presentato nei manuali di fisica, cioè il passaggio da una concezione della matematica come disciplina fondata su concetti definiti e proposizioni dimostrate all'interno di teorie a disciplina dei metodi risolutivi di esercizi basati su equazioni e metodi di sostituzione, porta con sé un passaggio da una concezione strutturale a una concezione strumentale dell'interdisciplinarità tra matematica e fisica a un rafforzamento della visione strumentale dei rapporti tra le discipline.

Da questa analisi emergono alcuni spunti che mostrano le potenzialità di una lettura parallela del testo storico e del manuale. Senza dubbio, restano da sciogliere diversi nodi critici prima di poter trasformare tutto ciò in pratiche didattiche concrete. L'auspicio è che dai futuri sviluppi della ricerca possano derivare nuovi formati interdisciplinari di rappresentazione della conoscenza e strumenti linguistici che rendano sempre più consapevoli i docenti dei diversi modi attraverso cui si può costruire un discorso interdisciplinare efficace.

Riferimenti bibliografici

Corpus di manuali analizzati

Dodero, Nella – Baroncini, Paolo – Manfredi, Roberto (2012), *Lineamenti math blu. Edizione riforma. Per le Scuole superiori*, Milano, Ghisetti e Corvi Editori.

Bergamini, Massimo – Barozzi, Graziella – Trifone, Anna (2015), *Matematica.blu 2.0, vol.3*, Bologna, Zanichelli.

Caforio, Antonio – Ferilli, Aldo (2000), *Fisica!*, Milano, Mondadori.

Cantelli, Mario (1998), *Fisica generale. Per il triennio*, Padova, CEDAM.

Consolini, Bruna – Gambotto, Annamaria (2019), *Gauss. Corso di matematica*, Milano, Tramontana.

Cutnell, John D. – Johnson, Kenneth W. – Young, David – Stadler, Shane (2017), *La fisica di Cutnell e Johnson* (traduzione di Danilo Cinti), Bologna, Zanichelli (ed. orig. Hoboken, Wiley & Sons, 2015).

Galilei, Galileo (1638/1888), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica ed i movimenti locali*, in Antonio Favaro (a cura di), *Edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei*, Firenze, Tipografia Barbera (ed. orig. Leida, Ludovico Elzeviro, 1638).

Galilei, Galileo (1980), *Opere di Galileo Galilei*, a cura di Franz Brunetti, Torino, UTET (ed. orig. Leida, Ludovico Elzeviro, 1638).

Pugliese Jona, Silvia (1984), *Fisica e Laboratorio*, Torino, Loescher.

Walker, James, S. (2017), *Physics,* 5th ed., London, Pearson Education.

Walker, James, S. (2020), *Fondamenti di fisica* (ed. italiana a cura di Giovanni Organtini), London, Pearson Italia (ed. orig. London, Pearson Education, 2017).

Riferimenti bibliografici

Altieri Biagi, Maria Luisa (1965), *Galileo e la terminologia tecnico-scientifica*, Firenze, Olschki.

Altieri Biagi, Maria Luisa (1984), *Forme della comunicazione scientifica*, in Alberto Asor Rosa (a cura di), *Letteratura italiana. Le forme del testo*, 3, Torino, Einaudi, pp. 891-947.

Altieri Biagi, Maria Luisa (1995), *Coerenza logica e coesione sintattica nella scrittura di Galileo*, in *Galileo a Padova, 1592-1610. Atti delle celebrazioni galileiane, 1592-1992 (Padova, 7 dicembre 1991 - 7 dicembre 1992)*, Trieste, Lint, 5 voll., vol. 5º (*Occasioni galileiane*), pp. 53-77.

Battistini, Andrea (1978), *Gli "aculei" ironici della lingua di Galileo*, in «Lettere italiane», 30/3, pp. 289-332.

Bianchi, Mauro (2020), *Galileo in Europa. La scelta del volgare e la traduzione latina del Dialogo sopra i due massimi sistemi*, Venezia, Edizioni Ca' Foscari.

Bolelli, Tristano (1955), *Lingua e stile di Galileo*, in «Supplemento del Nuovo Cimento», 10/2, pp. 1173-1192.

Boero, Paolo – Morselli, Francesca (2009), *The use of algebraic language in mathematical modelling and proving in the perspective of Habermas's Theory of rationality*, in Viviene Durand Guerrier, Sophie Soury-Lavergne, Ferdinando Arzarello (a cura di), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Lion, Institut National de Recherche Pedagogique and ERME, pp. 964-973.

Boero, Paolo – Guala, Elda – Morselli, Francesca (2013), *Crossing the borders between mathe-matical domains: a contribution to frame the choice of suitable tasks in teacher education*, in Anke M. Lindmeier, Aiso Heinze (a cura di), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Germany, IPL, pp. 97–104.

Braaten, Melissa – Windschitl, Mark (2011), *Towards a Stronger Conceptualization of Scientific Explanation for Science Education*, in «Science Education», 95, 639-669.

Branchetti, Laura – Cattabriga, Alessia – Levrini, Olivia (2019), *Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: The case of the blackbody*, in «Physical Review Physics Education Research», 15, https://journals.aps.org/prper/abstract/10.1103/-PhysRevPhysEducRes.15.020130 (ultima consultazione 13/06/2021).

Carugo, Adriano – Geymonat, Ludovico (a cura di) (1958), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (1638)*, Torino, Einaudi.

Cerreta, Pietro (2019), *Guidobaldo, Galileo e l'esperimento della pallina tinta d'inchiostro*, in «Giornale di fisica», pp. 167-186.

Chevallard, Yves (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Cortelazzo, Michele (1994), *Testo scientifico e manuali scolastici*, in Maria Luisa Zambelli (a cura di), *La rete ei nodi. Il testo scientifico nella scuola di base*, Firenze, Nuova Italia, pp. 3-14.

D'Amore, Bruno (2003), *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, Bologna, Pitagora.

D'Amore, Bruno (2012), *Cosa serve per diventare buoni insegnanti di matematica?*, in Giorgio Bolondi (a cura di), *Perché studiare la matematica*, Milano, Pearson, pp. 131-162.

De Mauro, Tullio (1988), *Linguaggi scientifici e lingue storiche*, in Anna Rosa Guerrieri (a cura di), *L'educazione linguistica e i linguaggi delle scienze*, Firenze, La Nuova Italia, pp. 9-19.

Di Giandomenico, Mauro – Guaragnella, Pasquale (a cura di) (2006), *La prosa di Galileo. La lingua, la retorica, la storia*, Lecce, Argo.

Fauvel, John (1991), *Using history in mathematics education*, in «For the Learning of Mathematics», 11/2, pp. 3-6.

Ferrari, Pier Luigi (2004), *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*, Bologna, Pitagora.

Ferrari, Pier Luigi (2020), *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*, Torino, UTET Università.

Frodeman, Robert – Klein, Julie Thompson – Pacheco, Roberto Carlos Dos Santos (Eds.) (2017), *The Oxford handbook of interdisciplinarity,* Oxford, Oxford University Press.

Furinghetti, Fulvia (1997), *History of mathematics, mathematics education, school practice: case studies linking different domains*, in «For the learning of mathematics», 17/1, pp. 55-61.

GISCEL Sardegna (1988), *Materie scientifiche, libri di testo e linguaggio: il punto di vista di insegnanti e studenti*, in Anna Rosa Guerrieri (a cura di), *L'educazione linguistica e i linguaggi delle scienze*, Firenze, La Nuova Italia, pp. 267-286.

Gombi, Alessandro (2020), *The foundational case of the parabolic motion: design of an interdisciplinary activity for the IDENTITIES project*, Tesi di laurea, Università di Bologna, relatrice Prof.ssa Olivia Levrini.

Gualdo, Riccardo – Telve, Stefano (2015[2011]), *Linguaggi specialistici dell'italiano*, Roma, Carocci.

Jankvist, Thomas Uffe (2009), *A categorization of the whys and hows of using history in mathematics education*, in «Educational Studies in Mathematics Education», 71/3, pp. 235-261.

Assis, Andre Koch Torres. – Magnaghi, Ceno Pietro (2016), *Il Metodo Illustrato di Archimede: Usando la Legge della Leva per Calcolare Aree, Volumi e Centri di Gravità*, Montreal, Apeiron.

Karam, Ricardo (2015), *Introduction of the thematic issue on the interplay of physics and mathematics*, in «Science & Education», 24, pp. 487.

Mariotti, Maria Alessandra (2000), *Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment*, in «Educational Studies in Mathematics», 44, pp. 25-53.

Migliorini, Bruno (1948), *Galileo e la lingua italiana*, in Id. (a cura di), *Lingua e cultura*, Roma, Tumminelli, pp. 135-158.

MIUR (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i licei*, DPR 89 del 15 marzo 2010.

Sbisà, Marina (2007), *Detto non detto. Le forme della comunicazione implicita*, Roma-Bari, Laterza.

Speranza, Francesco (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Bologna, Pitagora.

Svalberg, Agneta M. L. (2009), *Engagement with language: interrogating a construct*, in «Language Awareness», 18, pp. 242-258.

Tzanakis, Costantinos (2016), *Mathematics & physics: an innermost relationship. Didactical implications for their teaching & learning*, in «Proceedings of History and Pedagogy of Mathematics, Satellite of ICME 2016 (IREM de Montpellier, Montpellier, France)», <hal-01349231> (ultima consultazione 13.06.2021).

Viale, Matteo (2019), *I fondamenti linguistici delle discipline scientifiche. L'italiano per la matematica e le scienze a scuola*, Bologna, Cleup.