DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2024 (15), 32 - 50, DOI: 10.33683/ddm.24.15.2
OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Ostacoli allo sviluppo dell'anticipazione in contesto algebrico

Obstacles to the development of anticipation in algebraic context

Erica Fiorini e Andrea Maffia
Università di Bologna – Italia

erica.fiorini3@studio.unibo.it, andrea.maffia@unibo.it

Sunto / L'anticipazione è un processo cognitivo che agisce in numerose consegne matematiche, incluso il trattamento di espressioni algebriche. Tuttavia, alcuni studenti mostrano difficoltà nello sviluppo di questo tipo di abilità che possono essere ricondotte ad ostacoli di diversa natura: ontogenetico, epistemologici e didattici. Attraverso la somministrazione di un questionario e dei successivi focus group, si mette in evidenza che, nello sviluppo dell'anticipazione per studenti di scuola secondaria, intervengono ostacoli di tutti e tre i tipi e si suggerisce che alcuni di questi (quelli didattici in particolare) potrebbero essere prevenuti o risolti con opportuni interventi didattici.

Parole chiave: anticipazione; senso della struttura; algebra; scuola secondaria di secondo grado.

Abstract / Anticipation is a cognitive process acting in various mathematical tasks, including the treatment of algebraic expressions. However, some students show difficulties in developing this type of skill which can be traced back to obstacles of different natures: ontogenetic, epistemological and didactical ones. Through the administration of a questionnaire and subsequent focus groups, this research highlights that, in the development of anticipation for secondary school students, obstacles of all three types intervene and it is suggested that some of these (the didactical ones in particular) could be prevented or resolved with appropriate educational interventions.

Keywords: anticipation; structure sense; algebra; upper secondary school.

1 Introduzione

Ormai da molti decenni la ricerca in didattica della matematica (e non solo) ha messo in evidenza l'importanza di svariati processi cognitivi e metacognitivi all'interno di attività complesse come il problem-solving. Azioni di pianificazione e monitoraggio dell'attività sono fondamentali quando si svolge una consegna matematica, specialmente quando sono richiesti diversi passaggi. Se questo è sicuramente vero per i problemi più complessi, questioni analoghe possono valere anche per esercizi più di routine, i quali non prevedono esclusivamente uno svolgimento procedurale e/o meccanico. Per esempio, Arcavi (1994) nota come spesso, quando si utilizza un'equazione per risolvere un problema, il legame tra i simboli utilizzati e il contesto del problema viene perso durante la fase di trattamento simbolico, ma un solutore esperto può ricostruire il significato di ciascuno dei passaggi in relazione al contesto del problema (sia esso intra- o extra-matematico).
Ci si può domandare come queste abilità descritte da Arcavi possano essere sviluppate, quali pratiche didattiche possano supportare studenti e studentesse nell'approcciassi al trattamento di espressioni algebriche in modo consapevole. Secondo Boero (2001), questo avviene solo quando le trasformazioni standard (formule conosciute) sono integrate da processi di anticipazione e, a suo parere, la pratica scolastica è sbilanciata verso le formule a sfavore dello sviluppo dell'anticipazione.
In questo contributo, dopo un primo inquadramento teorico su quello che si intende quando si parla di "anticipazione", ci concentreremo su possibili ostacoli che si possono presentare agli studenti nello sviluppo di questa capacità, con un particolare riferimento alla scuola secondaria.[1] L'analisi di protocolli raccolti in due classi di prima liceo scientifico italiane servirà a mostrare la varietà nella natura di tali ostacoli.

2 Anticipazione in matematica

Il costrutto di "anticipazione" viene introdotto in ambito psicologico, contesto di ricerca in cui viene largamente utilizzato (a volte si parla anche di "previsione" – *forecasting* in inglese). Uno dei lavori seminali è sicuramente quello degli psicologi della Teoria dell'Attività, che introducono il concetto di "riflessione anticipatoria sulla realtà". Per esempio, nell'opera di Anokhin (1962/1978) troviamo descritto come ogni organismo possa anticipare gli eventi del mondo esterno sulla base dell'iterazione di eventi che fungono da parametro di misura per il tempo stesso. In particolare, *homo sapiens* è in grado di notare che alcuni eventi avvengono in concomitanza e/o in sequenza in un determinato ordine. La ripetizione di certi eventi coincide con la ripetizione di stimoli sensoriali e quindi in specifiche sequenze di reazioni (biochimiche, in senso pavloviano) e, nel tempo, nella possibilità di prevedere la presenza dell'ultimo stimolo della sequenza quando si è in presenza del primo. Anokhin propone un modello per descrivere i differenti processi cognitivi alla base dell'anticipazione; presentiamo di seguito tale modello così come è descritto in inglese da Tooméla (2015; **Figura 1**) ed evitando il ricorso a molti termini tecnici.
Un soggetto che è motivato a soddisfare un certo bisogno recupera dalla memoria tutte le informazioni connesse alla soddisfazione di tale bisogno nelle proprie esperienze passate. La selezione delle informazioni è fatta anche sulla base delle risorse disponibili in quel momento e analizzando quali

1. In Italia, la scuola secondaria si suddivide in scuola secondaria di primo grado, che dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino, e scuola secondaria di secondo grado, che dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

elementi dell'ambiente permettono o inibiscono l'uso di tali risorse. Sulla base di queste informazioni, il soggetto prende una decisione sul proprio comportamento (*decision-making*). Quando il comportamento deciso viene messo in atto, l'azione porta a un risultato sul soggetto o sull'ambiente. Tale cambiamento viene percepito e confrontato con il risultato atteso sulla base delle informazioni che erano presenti in memoria. Se le due informazioni coincidono il comportamento viene fermato (o in caso di una sequenza di azioni si passa al prossimo passaggio). Invece, se il risultato non coincide con le attese, un nuovo comportamento viene attivato per raggiungere il risultato atteso.

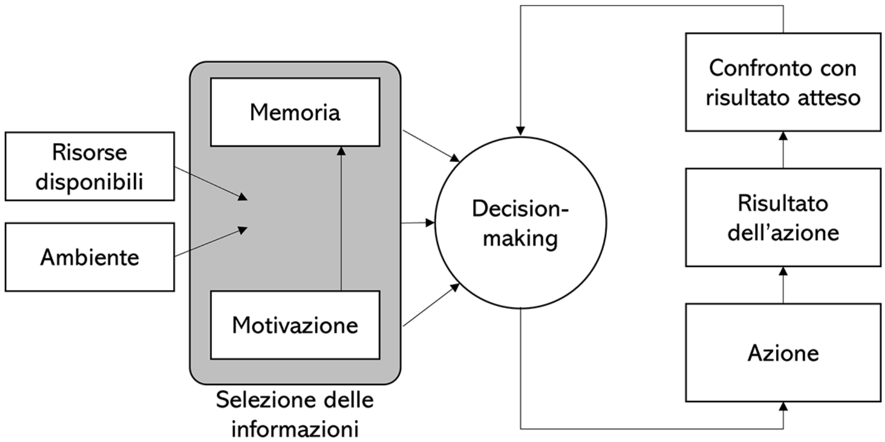


Figura 1. Schema semplificato del modello di Anokhin come presentato da Tooméla (2015).

Nel contesto della didattica della matematica il termine "anticipazione" viene introdotto da Boero (2001) proprio in riferimento al trattamento di espressioni algebriche. In particolare, Boero definisce l'anticipazione come «il processo mentale attraverso il quale un soggetto prevede la forma finale (e/o i passaggi intermedi) di un'espressione algebrica utile a risolvere un problema e la direzione generale delle trasformazioni necessarie per arrivarci» (p. 110).
Per meglio esplicitare questa definizione, facciamo riferimento a un esempio tratto dallo stesso lavoro di Boero: consideriamo la soluzione di un'equazione goniometrica come $\sin^2 x + \cos^2 2x = 3/2$. Per risolverla, possiamo pensare di trasformarla in $\sin^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = 3/2$ da cui possiamo ottenere $\sin^2 x + (1 - 2\sin^2 x)^2 = 3/2$ che equivale a $4\sin^4 x - 3\sin^2 x - 1/2 = 0$, che diviene un'equazione di secondo grado nell'incognita y sostituendo $y = \sin^2 x$. In queste trasformazioni si applicano trasformazioni standard, come sostituire $\cos^2 2x$ con $\cos^2 x - \sin^2 x$, ma questo viene fatto anticipando la possibilità di ricondursi a un'equazione che abbia come sola incognita $\sin^2 x$, un'equazione per la quale abbiamo delle procedure standard di soluzione. L'esperienza che uno studente può aver già acquisito con equazioni di questo tipo, la forma iniziale della particolare equazione considerata e la conoscenza delle trasformazioni standard possibili guidano il processo risolutivo nelle diverse anticipazioni necessarie.
Secondo Boero (2001, p. 110),

> «diversi elementi concorrono a questo processo: la memoria del passato; trasformazioni che hanno avuto successo fatte in situazioni simili (ovvero l'esperienza); l'intuizione di possibili forme finali o intermedie dell'espressione algebrica suggerite dalla sua forma attuale; la capacità di mettere in relazione la forma di una possibile espressione trasformata con la soluzione del problema».

Vari autori in ambito psicologico riconducono l'efficacia dell'anticipazione sia alla memoria episodica (ovvero il ricordo di quanto in passato è avvenuto in particolari situazioni) sia a quella semantica (conoscenza generale sul mondo). Boero (2001) parla di una dialettica tra due poli opposti: l'uso di trattamenti standard, ovvero l'applicazione di formule note, e l'anticipazione di nuove forme di trattamento specifiche per il particolare problema che si sta affrontando. Seguendo il modello di Anokhin presentato precedentemente (Figura 1) possiamo interpretare le trasformazioni standard note come risorse disponibili in memoria; il processo di decision-making sarà informato da queste conoscenze, ma sarà nell'iterazione di confronto tra risultati attesi e risultati ottenuti che verrà a generarsi l'anticipazione utile (o meno) a risolvere il problema. Analizziamo l'esempio precedente sulle equazioni goniometriche con il modello di Anokhin per esplicitare il possibile legame tra questo e la definizione di Boero: lo studente desidera risolvere l'equazione (motivazione) e tale desiderio attiva nella memoria tutte le informazioni che sono associate al suo soddisfacimento (Tooméla, 2015), quelle che Boero chiama "la memoria del passato". Il richiamo dalla memoria è supportato o vincolato dalle risorse disponibili e dall'ambiente in cui ci si trova (interpretiamo in questo senso il riferimento a "situazioni simili" fatto da Boero). Per esempio, avere a disposizione delle tavole per le formule goniometriche potrebbe permettere di richiamare alcune esperienze in cui certe formule sono state efficacemente impiegate. La sintesi delle informazioni evocate dalla memoria (l'esperienza fatta in passato) suggerisce un piano di azione (decision-making) che include «cosa, come e quando farlo» (Tooméla, 2015, p. 3) si ha così un'intuizione sulla forma finale (come direbbe Boero), ovvero un'attesa sul risultato – nel modello di Anokhin. Nel nostro esempio, il piano potrebbe consistere nel trasformare l'equazione in una in cui non compaiano altre incognite rispetto a $\sin^2 x$ per poi trasformare l'equazione goniometrica in una polinomiale. Si avvia quindi il piano d'azione applicando una trasformazione che in passato è stata usata con successo per ottenere il risultato atteso o che ci si aspetta possa permetterlo ($\cos^2 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$); successivamente si verifica se la trasformazione ha avuto come risultato l'effetto desiderato, ovvero si mette «in relazione la forma di una […] espressione trasformata con la soluzione [attesa] del problema» (Boero, 2001, p. 110). Nel nostro esempio, non abbiamo ancora ottenuto l'esito anticipato perché compare ancora un termine che coinvolge il coseno. Si ritorna al processo di decision-making: si analizza la nuova forma e le risorse (conoscitive e materiali) a disposizione per affrontarla, eventualmente tra quelle già recuperate inizialmente. Viene quindi sviluppato un nuovo piano d'azione: si realizza una nuova trasformazione ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$) e, solo quando si sarà ottenuto il risultato desiderato, si procederà ad attivare la prossima fase del piano stabilito – in questo caso la sostituzione per ottenere un'equazione polinomiale in una sola incognita.

Notiamo che l'anticipazione è un processo cognitivo che svolge un ruolo importante nella soluzione anche di consegne algebriche non troppo complesse come il trattamento di espressioni algebriche o aritmetiche. Chiaramente l'anticipazione (in senso psicologico) non è un fenomeno che riguarda unicamente il trattamento di espressioni algebriche e ben si applica anche ad altri contesti matematici (si veda, ad esempio, Miragliotta, 2022). Tuttavia, qui ci concentriamo sulle manipolazioni algebriche e, nel chiederci quali ostacoli possano insorgere nello sviluppo del processo di anticipazione stesso, decidiamo di concentrarci sulle più semplici, quelle che in Italia sono generalmente introdotte nei primi anni della scuola secondaria di secondo grado per risolvere equazioni polinomiali di primo grado o per fattorizzare polinomi di grado maggiore.

Il modo in cui gli studenti approcciano questo tipo di esercizi è stato studiato in letteratura. Per esempio, la differenza tra una soluzione meccanica ed esclusivamente procedurale di equazioni e l'anticipazione di manipolazioni utili alla soluzione stessa è ben descritta nel lavoro di Hoch e Dreyfus (2004) che propongono a studenti di grado 9 e 10 equazioni del tipo:

$$\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 7 + \frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}.$$

Gli autori notano che, tra gli studenti da loro intervistati, la percentuale di coloro che ricorrono alla cancellazione del termine che compare in ambo i lati dell'uguaglianza è molto bassa (nel loro lavoro meno di uno studente su 4 per le equazioni più semplici) rispetto a quella di coloro che eseguono trattamenti tra le frazioni algebriche e numerosi calcoli prima di arrivare a una soluzione (corretta o errata che sia). I diversi comportamenti possono essere interpretati, rispettivamente, come istanze (nel contesto del trattamento delle espressioni algebriche) di quelle che Skemp (1976) identifica come comprensione relazionale e comprensione strumentale (a volte detta anche procedurale) della matematica.

Appare evidente che la capacità di anticipare trasformazioni utili al trattamento di un'espressione algebrica non è necessariamente diffusa e sembra quindi lecito interrogarsi su quali siano i fattori che ne inibiscono lo sviluppo. Come visto in precedenza, questo può dipendere dalle esperienze e conoscenze pregresse, ma ci chiediamo se il richiamo dalla memoria sia l'unica fase del processo di anticipazione in cui possono presentarsi ostacoli. Per contemplare la possibile varietà di ostacoli che possono presentarsi, faremo riferimento alla teoria degli ostacoli di Brousseau che presentiamo nella sezione successiva.

3 La teoria degli ostacoli

Brousseau (2006) indica come ostacolo, qualcosa che si frappone alla costruzione cognitiva di un concetto. Sebbene lui stesso sostenga che sia impossibile individuare l'origine di un ostacolo in uno solo dei poli del sistema didattico (chiamato anche triangolo della didattica, studente-insegnante-sapere secondo Chevallard), è possibile identificare quali cambiamenti nel sistema didattico potrebbero permettere di ovviare all'ostacolo. Si possono quindi classificare i vari ostacoli all'apprendimento in tre categorie principali, in relazione ai poli protagonisti del triangolo della didattica. Si possono evidenziare, rispettivamente, *ostacoli didattici* relativi al polo dell'insegnante, *ostacoli ontogenetici* (o cognitivi), legati all'allievo (in relazione al docente e al sapere proposto) e infine *ostacoli epistemologici* riferiti alla sfera del sapere.

Gli ostacoli di tipo ontogenetico hanno radice nelle difficoltà specifiche dello studente (per es. di tipo neuropsicologico o cognitivo) in base allo specifico momento dello sviluppo. Se assumiamo la prospettiva vygotskiana, uno studente può apprendere un nuovo concetto (oggetto o procedura) solo se questo si trova nella sua zona di sviluppo prossimale (Vygotskij, 1980). Un intervento didattico al di fuori della zona di sviluppo prossimale dello studente è inefficace. Pertanto, gli ostacoli di questo tipo fanno riferimento alla sfera delle conoscenze e delle abilità accessibili ad uno studente in un determinato momento.

Gli ostacoli di natura didattica sono quelli che sembrano dipendere soprattutto dalle scelte del sistema educativo (Brousseau, 2006). Può trattarsi di scelte a livello sistemico (di curriculum), a livello di strumenti (libro di testo o altri materiali didattici) o delle pratiche didattiche del singolo insegnante. A livello di singola classe possono dipendere dalle particolari aspettative che l'insegnante ha sui propri allievi o che loro hanno nei confronti del docente, ovvero sul contratto didattico (Brousseau, 2006) sia esso implicito o esplicito. Il contratto didattico, infatti, regola l'insieme di comportamenti attesi dagli studenti nei confronti dell'insegnante e dall'insegnante nei confronti degli studenti, i quali contribuiscono a dettare anche regole non scritte, implicite (Brousseau, 2006).

Gli ostacoli di tipo epistemologico sono generalmente inevitabili perché si tratta di quelli che hanno avuto un ruolo nella formazione stessa del concetto. Come spiegano Gagatsis e Alexandrou (2022, p. 12):

> «La ricerca [in storia della matematica] indica che molti concetti matematici sono stati "segnati" dalle difficoltà dei grandi matematici. È ragionevole supporre che molte delle difficoltà che a un certo punto hanno fermato gli scienziati più ispirati, devono ancora preoccupare i nostri studenti».

Chiaramente questo non significa che particolari interventi didattici non possano aiutare quantomeno a non amplificarne l'effetto (Brousseau, 2006).

La natura degli ostacoli che possono presentarsi nella formazione di processi di anticipazione è varia. Possiamo quindi specificare meglio la nostra domanda di ricerca chiedendoci quali tipologie di ostacoli intervengano nel processo di anticipazione (articolato secondo il modello di Anokhin) e quali aspetti dell'anticipazione ne siano influenzati.

4 Metodi

Al fine di indagare gli ostacoli allo sviluppo del processo di anticipazione si è scelto di sottoporre alcune domande a studenti di due classi prime di un liceo scientifico di Bologna. Volendo indagare la natura degli ostacoli, piuttosto che la loro generalità o frequenza, si è deciso di ricorrere a un'analisi qualitativa e non quantitativa.
La scelta del grado di istruzione degli studenti è stata pensata in relazione al fatto che l'introduzione della manipolazione algebrica avviene in Italia proprio a cavallo tra la scuola secondaria di primo e secondo grado. La scelta della prima classe (nella parte finale dell'anno scolastico) ci assicura che tutti gli studenti siano già stati introdotti alla manipolazione algebrica, ma contemporaneamente possano ancora non avere molta familiarità con essa. Chiaramente, il calcolo algebrico non è stato affrontato da questi studenti solo nella classe che frequentavano al momento della nostra raccolta dati, ma anche durante la scuola media. In questo senso, appare lecito supporre che l'argomento appena affrontato in prima liceo abbia avuto un'impostazione diversa rispetto al grado scolare precedente.

4.1 Modalità di somministrazione e raccolta dati

L'attività proposta agli studenti è stata suddivisa in due fasi: una prima fase di somministrazione di un questionario scritto, separatamente nelle due classi, e una seconda parte organizzata in forma di focus group.

4.1.1 Questionario

Per quanto riguarda la prima fase, è stato costruito un questionario composto da cinque esercizi a risposta aperta. La scelta dei quesiti è stata fatta con l'obiettivo di comprendere se gli studenti mettessero o meno in atto il processo di anticipazione in compiti di fattorizzazione/semplificazione di espressioni letterali e nella soluzione di equazioni di primo grado (argomenti da poco trattati in classe). Seguendo l'esempio presentato prima di Hoch e Dreyfus (2004) si sono scelte espressioni letterali che permettessero diverse possibili tipologie di soluzione, cercando di proporre consegne che portassero gli studenti a soffermarsi sulla struttura della consegna proposta e che li spingessero a trovare il metodo di svolgimento più efficace, principalmente attraverso l'uso di prodotti notevoli piuttosto che eseguire tutti i calcoli.
A seguito di ciascun esercizio si è pensato di introdurre una richiesta aggiuntiva: «Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, quale? Se no, perché?». Lo scopo di questa domanda è quello di osservare se, leggendola, lo studente riesce a vedere nell'esercizio proposto una struttura diversa da quella che aveva in mente alla prima lettura e, magari, a ripensare allo svolgimento proposto, trovando delle alternative.
Si è deciso di presentare agli studenti degli esercizi non complessi né lunghi dal punto di vista del calcolo, in modo che non emergessero difficoltà legate a procedure troppo complicate, poiché lo scopo della ricerca non era quello di indagare le capacità di manipolazione simbolica degli studenti.
Per stabilire quali quesiti proporre, tra le varie alternative pensate, è stata creata una prima bozza di compito, con quelli che sembravano maggiormente adatti al fine della ricerca, ipotizzando a priori i vari tentativi di risoluzione che ci si poteva aspettare dagli studenti, riflettendo su quali potessero es-

sere i possibili errori in cui potevano incorrere durante lo svolgimento della prova e i possibili ostacoli che sarebbero potuti emergere.
Dopo questa fase, c'è stato un allineamento con i docenti delle classi: è stato chiesto loro se le richieste fossero in linea con ciò che gli studenti avevano affrontato in classe e se il numero di quesiti fosse eccessivo o scarso per svolgere la prova nel tempo concordato di un'ora.
Questo ha aiutato a ripensare la struttura del compito, riducendo il numero di esercizi inizialmente ideati e tenendo conto delle modalità di svolgimento delle prove di valutazione proposte solitamente dai docenti, in modo da non presentare agli studenti un questionario fuori dalla loro portata o che li destabilizzasse ancor prima di cominciare. Di seguito riportiamo i quesiti che, proprio per il desiderio di utilizzare consegne simili a quelle usualmente svolte in classe, fanno riferimento ad attività intrinsecamente procedurali (si noti che infatti sono tutte introdotte da verbi all'infinito presente che indicano atti direttivi). Come suggeriremo di seguito nell'analisi a priori dei cinque quesiti, tali attività possono acquisire una valenza di tipo relazionale proprio nei processi di anticipazione che possono guidare le trasformazioni algebriche per lo svolgimento del compito.
La scelta di diminuire il numero di quesiti è stata dettata anche dal voler lasciare agli studenti tutto il tempo necessario per poter riflettere sulle risposte, in modo che non si presentassero svolgimenti incompleti o assenti a causa del tempo. Tra i cinque quesiti proposti nel questionario, erano presenti due equazioni da risolvere, due fattorizzazioni e un'espressione algebrica da semplificare. In particolare, si è richiesto di:

– semplificare $(x + 2)(2x + 3)(x - 2)$;
– scrivere come prodotto di fattori $2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$;
– scrivere come prodotto di fattori $4a^6 - 16b^4$;
– risolvere l'equazione $(x + 1)^2 - (x + 2) = (x + 1)(x + 1)$;
– risolvere l'equazione $4x - x^2 + 5(4 - 2x) = (3 - x)(3 + x)$.

In tutti i casi proposti è possibile svolgere per esteso i calcoli oppure notare la possibilità di raccogliere un fattore comune, utilizzando un raccoglimento totale o parziale; notare la presenza di una differenza di quadrati o di un quadrato di binomio per semplificare lo svolgimento. Nel primo quesito ci si aspetta che lo studente che attiva un processo di anticipazione osservi l'intera espressione prima di procedere con lo svolgimento, notando la presenza di una somma per una differenza da poter svolgere come primo passaggio, agevolando poi il prodotto con il terzo fattore.
Uno svolgimento automatico dei prodotti nell'ordine in cui sono scritti porterebbe invece a svolgere prima $(x + 2)(2x + 3)$ e poi il prodotto di ciò che si ottiene con il fattore $(x - 2)$.
Nel secondo quesito il risultato atteso da parte di chi non anticipa è lo svolgimento dei prodotti in ordine e la successiva somma di monomi simili: $2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x = 6x + 8x^2 + 2x - 8x^2 + 8x = 16x$, presupponendo la mancata osservazione a priori del fattore $2x$, comune ai due addendi dell'espressione, da poter raccogliere inizialmente.
Per quanto riguarda il terzo esercizio, ciò che si voleva testare era il riconoscimento della differenza di quadrati da parte di chi anticipa. In alternativa all'immediato riconoscimento del prodotto notevole, ciò che ci si poteva aspettare era il raccoglimento iniziale di un fattore 2 o 4, eventualmente seguito dal riconoscimento della differenza di quadrati.
Gli ultimi due esercizi riguardano la risoluzione di equazioni con lo scopo di osservare se gli studenti ragionino sulla struttura, rilevando la presenza di termini uguali nei due membri dell'equazione nel caso della prima e di un prodotto notevole nella seconda.
Ci si aspetta che una manipolazione meccanica preveda lo svolgimento di tutti i calcoli del primo e

secondo membro e una procedura di risoluzione "standard" di questo tipo:

$(x + 1)^2 - (x + 2) = (x + 1)(x + 1)$
$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + x + x + 1$
$x^2 + x - 1 = x^2 + 2x + 1$
$x^2 + x - x^2 - 2x = 1 + 1$
$-x = 2$
$x = -2$

senza il riconoscimento dell'uguaglianza tra $(x + 1)^2$ e $(x + 1)(x + 1)$, che porta alla risoluzione della più semplice equazione $-(x + 2) = 0$.
Il questionario è stato somministrato agli studenti durante l'orario di lezione, in presenza dell'insegnante di matematica, in un tempo massimo per svolgere la prova di un'ora. Prima dell'inizio della prova è stato ribadito che i questionari sarebbero stati oggetto di analisi per motivi di ricerca, con una breve descrizione del suo contenuto e di come sarebbero stati usati i risultati delle prove, in modo che gli studenti fossero a conoscenza di cosa stessero facendo.
Durante lo svolgimento della prova ci sono state richieste di chiarimento rispetto alle consegne degli esercizi da parte degli studenti e osservazioni sulla domanda aggiuntiva, la quale è subito risultata inconsueta e non in linea con le loro aspettative su un usuale compito in classe. A tali domande non è stata data risposta per non alterare il risultato delle prove. Il tempo della prova è stato sufficiente per far completare tutti gli esercizi e il livello di difficoltà è stato percepito in generale come non eccessivo in confronto a ciò a cui gli studenti erano abituati.
Il questionario era anonimo, ma è stata esplicitata la richiesta di scrivere un *nickname* su ciascun foglio in modo che lo studente potesse riconoscere il proprio elaborato in un successivo momento. Questo è stato utile per la seconda fase della raccolta dati, dove sono stati organizzati dei focus group, separatamente in ognuna delle due classi, durante i quali si sono raccolte informazioni relativamente alle motivazioni delle risposte degli studenti ad alcuni dei quesiti del questionario e si è cercato di capire quali fossero le ragioni che stavano dietro alle modalità di svolgimento degli esercizi.

4.1.2 Focus group

Per la seconda fase si è pensato di organizzare un'attività di gruppo, preferendola all'intervista singola di ogni studente, utilizzando la tecnica del focus group.
I focus group sono una forma di intervista di gruppo finalizzata a raccogliere dati qualitativi in un tempo piuttosto breve, moderata da un intervistatore e basata sull'interazione tra i membri dello stesso, che mira a produrre una visione collettiva di un certo argomento che si sta trattando, piuttosto che una sua visione individuale (Manion et al., 2007); da tale interazione emergono poi i dati della ricerca. Questa seconda fase è stata pensata, infatti, con lo scopo di stimolare un dialogo tra pari su ciò che era emerso dagli elaborati degli studenti, in modo che essi fossero liberi di esprimere le proprie idee, senza il timore di un giudizio da parte dell'insegnante, come spesso accade in classe.
Si sono formati gruppi di 4-5 persone in modo da lasciare spazio ad ogni studente, suddividendo gli studenti in modo da evidenziare le peculiarità di ogni compito emerse dall'analisi, inserendo nello stesso gruppo coloro che in particolari esercizi avevano risposto in modo diverso (completo o incompleto, corretto o meno). Si è cercato quindi di formare gruppi che fossero rappresentativi di diverse tipologie di risposte al questionario (includendo sia istanze di anticipazione che risoluzioni più procedurali), seppur all'interno dei limiti contingenti del contesto (orario scolastico, studenti presenti ecc.).
Per raccogliere i dati sui focus group, si è realizzata una registrazione audio in modo da poter poi trascrivere fedelmente le parole degli studenti e analizzare le loro frasi in modo dettagliato come supporto alla ricerca.
I focus group si sono svolti circa una settimana dopo il questionario, durante le ore di lezione mattutine, prendendo a piccoli gruppi (circa 4-5 persone) gli studenti di ogni classe per circa trenta minuti

per gruppo. I focus group sono stati formati facendo riferimento ai nickname, dopo aver chiesto il consenso degli studenti per associare l'identità al compito svolto. Ogni studente ha visionato il proprio elaborato senza correzioni, e successivamente gli è stato chiesto di spiegare le ragioni per le quali avesse scritto un certo tipo di procedimento e quali ragionamenti avesse messo in atto per svolgerlo. Tutti gli studenti hanno acconsentito alla partecipazione.
Di seguito, per esemplificare i risultati ottenuti, mostreremo alcuni elaborati ed estratti della trascrizione dei focus group.

5 Risultati

All'interno di questa sezione ci proponiamo di analizzare i risultati ottenuti dallo svolgimento dei quesiti da parte degli studenti e dalle relative riflessioni emerse dai dialoghi nell'attività di gruppo.
Procediamo con l'analisi di alcuni protocolli ritenuti paradigmatici, individuando i possibili ostacoli incontrati dagli studenti nello svolgimento, tenendo conto delle tre tipologie descritte nella sezione 3 ed evidenziando parallelamente la presenza (o meno) di processi di anticipazione. Ciascuna delle seguenti sezioni fa riferimento a una delle tre tipologie di ostacoli; tuttavia, occorre specificare che, nella nostra classificazione, alcuni protocolli sono stati associati a più di una categoria, mostrando il profondo intreccio tra i diversi tipi di ostacolo. In particolare, in diversi casi il ruolo della didattica (dell'insegnante attuale o dei precedenti) può essere particolarmente rilevante.

5.1 Ostacoli ontogenetici

Iniziamo prendendo in esame una risoluzione al terzo quesito del questionario (**Figura 2**).

Es. 3

$4a^6 - 16b^4$

$4(a^6 - 4b^4)$

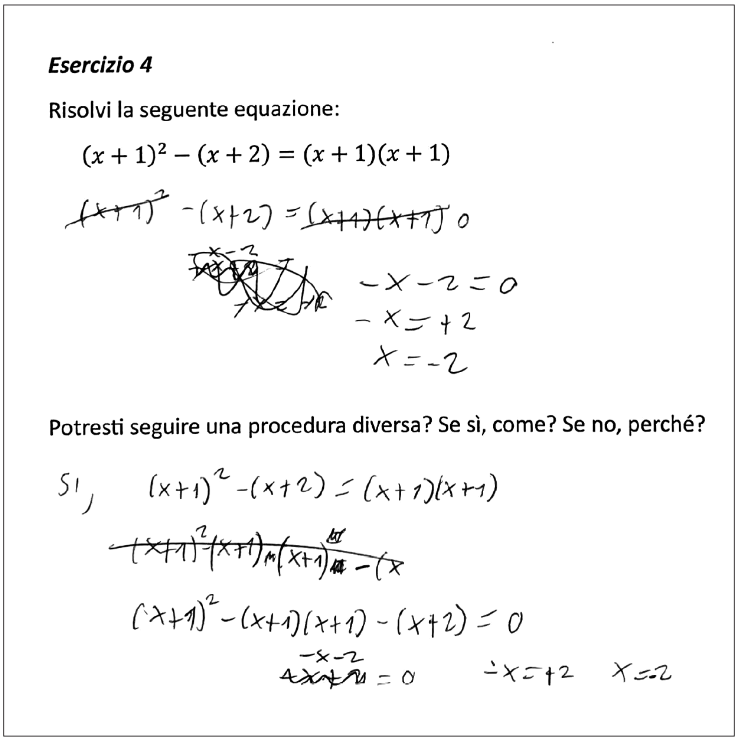
$4(a^3 + 2b^2)(a^3 - 2b^2)$

$4(a^3 + 2b^2)(a + b)(a^2 - 2b)$

$4(a^3 + 2b^2)(a + b)(a + 2)(a - b)$

Figura 2. Risposta di uno studente al terzo quesito del questionario.

Nella risposta si nota come la studentessa riesca a richiamare dalla memoria una trasformazione che ha avuto successo in situazioni precedenti e riscriva l'espressione come prodotto di una somma di monomi per la loro differenza. Successivamente perde il controllo del senso del trattamento e prosegue iterando lo stesso procedimento con qualsiasi binomio, anche quando non vi è la presenza di una differenza di quadrati. Durante la discussione di gruppo, afferma: «Sono partita con ($a + b$) e ($a – b$), poi mi sono convinta che bastava che ci fosse il più e meno e quindi ho continuato all'infinito e ho fatto una confusione immensa». Riteniamo che in questo caso che la difficoltà risieda nel processo di decision-making: la studentessa avvia il loop azione-risultato-confronto, ma sembra che il parametro da lei utilizzato per valutare i passaggi intermedi sia errato. In questo caso, l'inefficacia delle trasformazioni avviate potrebbe dipendere da una mancanza di conoscenza o da una misconcezione.
Prendiamo ora in esame la risoluzione di una delle equazioni della prova assegnata (**Figura 3**).


Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2-(x+2)=(x+1)(x+1)$$

$\cancel{(x+1)^2}-(x+2)=\cancel{(x+1)(x+1)}\ 0$

$-x-2=0$

$-x=+2$

$x=-2$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Si, $(x+1)^2-(x+2)=(x+1)(x+1)$

$(x+1)^2-(x+1)(x+1)-(x+2)=0$

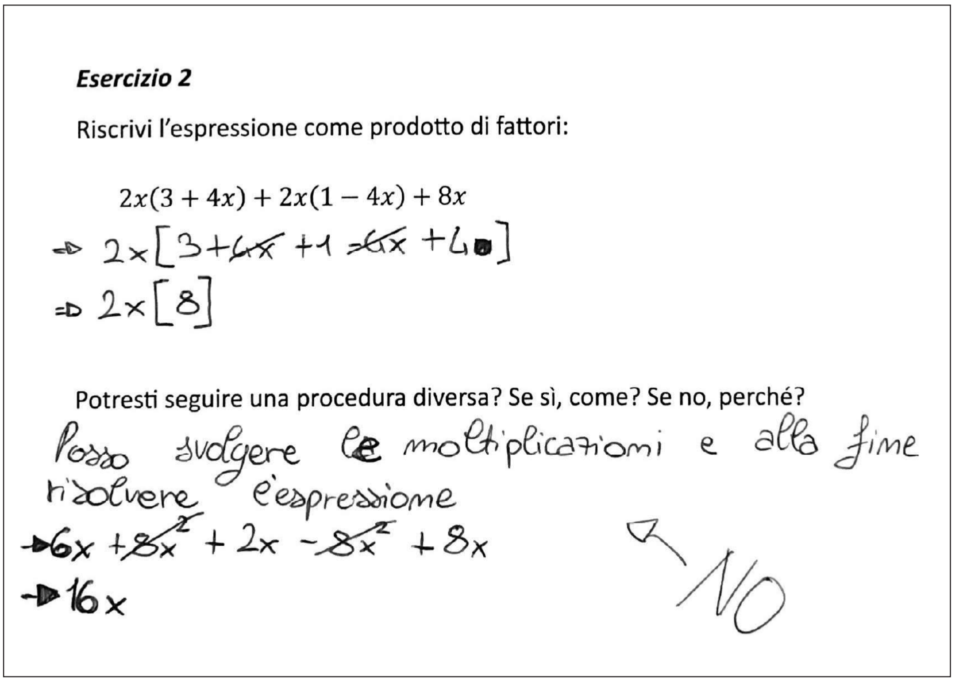
$-x-2=0 \quad -x=+2 \quad x=-2$

Figura 3. Risposta di uno studente al quarto quesito del questionario.

Innanzitutto, possiamo osservare che lo studente è riuscito a prevedere la possibilità di cancellare i termini $(x + 1)(x + 1)$ e $(x + 1)^2$ senza dover sviluppare queste espressioni; sembra sia avvenuta quindi un'anticipazione: lo studente non ricorre all'uso di trattamenti standard (lo sviluppo del quadrato di binomio) ma a trattamenti legati allo specifico problema. Così come suggerisce Boero (2001), la forma attuale dell'equazione suggerisce possibili trasformazioni. L'analisi del compito – e in particolare il riconoscimento dell'equivalenza tra $(x + 1)(x + 1)$ e $(x + 1)^2$ – richiama dalla memoria processi che hanno avuto successo in passato (la cancellazione di termini uguali ai due membri dell'uguaglianza). Tale processo viene interrotto quando non vi sono più termini uguali ai due membri e si avvia quindi la seconda parte del piano d'azione. Vediamo però che successivamente compare una serie di passaggi per giungere alla soluzione, potenzialmente evitabili: analizzata la nuova forma, in cui non compaiono più parentesi, lo studente non riesce ad identificare il valore dell'incognita dall'equazione $-x - 2 = 0$, ma svolge altri due ulteriori passaggi al fine di riportarsi alla forma $x = 2$. Potrebbe trattarsi di un ostacolo ontogenetico, legato a una difficoltà nella gestione dell'incognita o nell'interpretazione dell'equazione come uguaglianza che deve essere verificata, o ancora da alcune incertezze su come manipolare l'equazione (probabilmente lo studente si sente "più sicuro" a scrivere ogni passaggio per non commettere errori nella gestione dei segni). Potremmo però pensare che tutto ciò dipenda dalla richiesta tipica dell'insegnante di "non saltare i passaggi" nello svolgimento, che porta lo studente a scrivere più passaggi possibili per far vedere che riesce ad arrivare alla soluzione attraverso una procedura e non "indovinando" la soluzione: potrebbe trattarsi quindi di un ostacolo didattico. Osserviamo che lo studente ripete gli stessi passaggi anche nella seconda proposta di risoluzione. La difficoltà potrebbe quindi collocarsi nella relazione tra ambiente-motivazione-memoria. Come esplicitato da Tooméla (2015), l'ambiente può fungere da fattore limitante per le risorse selezionate e questo dipende dalle motivazioni dominanti. Se per lo studente la motivazione dominante è quella di soddisfare le aspettative del docente, si limiterà ad attivare quei piani d'azione che fanno uso di risorse che si ritiene che il docente consideri accettabili. Su questo torneremo in seguito nell'analisi degli ostacoli didattici.

5.2 Ostacoli epistemologici

Dall'analisi dei questionari, si riscontra una difficoltà generale di comprensione della consegna nella quale si richiede agli studenti di riscrivere l'espressione data come prodotto di fattori. Sembra che l'espressione "prodotto di fattori" risulti particolarmente complessa da interpretare. Infatti, durante la discussione nei focus group, gli studenti hanno esplicitato di avere avuto molta difficoltà nel capire cosa significassero la parola "prodotto" e la parola "fattori" (termini sicuramente già noti a loro in contesto aritmetico) nell'ambito dei polinomi.
In **Figura 4** riportiamo un esempio di risoluzione di uno dei quesiti che includevano tale richiesta.



Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$2x(3+4x)+2x(1-4x)+8x$

$\Rightarrow 2x[3+\cancel{4x}+1-\cancel{4x}+4]$

$\Rightarrow 2x[8]$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Posso svolgere le moltiplicazioni e alla fine risolvere l'espressione

$\rightarrow 6x+\cancel{8x^2}+2x-\cancel{8x^2}+8x$

$\rightarrow 16x$

NO

Figura 4. Risposta di uno studente al secondo quesito del questionario.

In questo caso lo studente, come emerge dal dialogo all'interno dei focus group che riportiamo di seguito, non ha chiaro cosa sia un prodotto di fattori. Infatti, quando gli viene chiesto di spiegare il motivo per cui, nel secondo svolgimento all'esercizio, ha scritto «NO», risponde così:

L.: «Qui avevo svolto le moltiplicazioni, però poi sono arrivato al risultato 16*x* che non era un prodotto di fattori come chiedeva l'esercizio; quindi, ho cancellato».
I.: «2*x* · [8] secondo te è un prodotto di fattori?»
L.: «Sì».
I.: «E 16*x* è un prodotto di fattori? [L. non risponde, gli altri membri del gruppo dicono di sì]».
I.: «L. non sei d'accordo con questa affermazione?»
L.: «No, io intendevo come se fosse una scomposizione e 16*x* non è una scomposizione. Mentre 4 · 4*x* è una scomposizione».
I.: «Quindi 16*x* non andava bene secondo te?»
L.: «Sì, forse sì».
[Il dialogo continua con una discussione in cui sono coinvolti anche gli altri membri del gruppo e alla fine lo studente si convince del fatto che siano entrambi prodotti di fattori].

In generale emerge in modo evidente il tentativo di anticipare: lo studente, sulla base delle esperienze fatte, si è creato un’immagine mentale sull’aspetto che il “risultato” dell’esercizio dovrebbe avere. Sembra che la sua attesa sia quella di avere almeno il prodotto (indicato) tra due monomi; (due) parti, ben evidenziate da delle parentesi e/o dal simbolo di moltiplicazione, come si nota nel primo caso, dove scrive come fattorizzazione finale $2x \cdot [8]$, lasciando addirittura delle parentesi spontaneamente aggiunte all’inizio dello svolgimento. Il ricorso a una trasformazione nota (il raccoglimento a fattor comune) sembra portare al risultato atteso (la forma finale prevista) e quindi il loop azione-risultato-confronto viene interrotto con soddisfazione. La seconda richiesta inibisce l’uso della trasformazione anticipata dallo studente chiedendone una ulteriore. Facendo riferimento a compiti analoghi nella sua passata esperienza, lo studente identifica un nuovo piano d’azione (svolgere i prodotti tra monomi e binomi tra parentesi) e ottiene come risultato il monomio $16x$, che però sembra vedere come un’unica entità inscindibile, che dal suo punto di vista non può essere interpretata come prodotto di fattori. La difficoltà risiede quindi nel confronto tra il risultato ottenuto e quello atteso, cioè nel mancato riconoscimento della loro equivalenza.
In questo caso, sembra che lo studente non riesca a ricondurre il significato degli oggetti che stava manipolando ai corrispondenti significati aritmetici, concentrandosi esclusivamente sulla manipolazione algebrica di simboli, non considerando che il monomio rappresenta proprio un prodotto per come è definito. Possiamo interpretare questa difficoltà come frutto di un ostacolo di tipo epistemologico, perché ha le sue radici nel passaggio (anche storicamente molto complesso) dall’aritmetica all’algebra intesa come meta-aritmetica (Caspi & Sfard, 2012; Linchevski & Livneh, 1999). È possibile che questo tipo di difficoltà abbia le proprie radici anche in ostacoli di tipo didattico: gli studenti potrebbero non aver strumenti interpretativi per le parole “fattore” e “prodotto” in contesto algebrico sia perché non precedentemente educati a riconoscere, per esempio, 2×8 come rappresentazione (non canonica, si veda Navarra, 2022) del prodotto tra i fattori 2 e 8 – vedendola solo come una operazione da svolgere – sia perché non guidati a riconoscere le analogie tra il calcolo aritmetico e il calcolo algebrico (Linchevski & Livneh, 1999). Ipotizziamo quindi la presenza di ostacoli didattici, che possono derivare da una mancata riflessione collettiva sui significati dei termini, degli oggetti, delle proprietà, i quali probabilmente vengono dati per scontati e acquisiti in precedenza, ma che in realtà non sono stati ancora interiorizzati da gran parte degli studenti.
Comportamenti simili emergono dal dialogo con altri studenti, che sottolineano come siano stati sempre abituati a vedere come risultato di una scomposizione “più parentesi moltiplicate”, suggerendo quindi ancora una volta anche la possibile origine didattica di questo tipo di ostacolo. Osserviamo, per esempio, il dialogo seguente, dove si richiede agli studenti quale sia la differenza tra scrivere $2x \cdot 8$ e scrivere $16x$.

G.: «Eh perché, se scrivi $16x$ poi come fai a trasformarlo all’indietro? Cioè, a me $16x$ sembrava proprio tipo un risultato».
I.: «Perché vuoi trasformarla all’indietro?»
G.: «Eh perché l’esercizio era scomponi in fattori».
I.: «$16x$ non è un prodotto di fattori?»
G.: «Ah 16 per x. Mi ha confuso il fatto che era un risultato così piccolo; di solito abbiamo più parentesi moltiplicate».

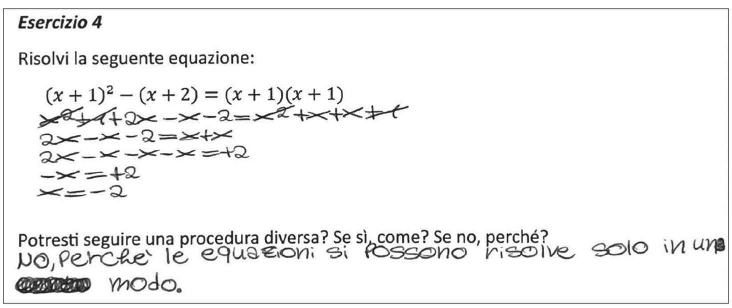
Come ulteriore conferma, riportiamo il seguente estratto di un focus group che ribadisce che molti studenti pensano che un prodotto debba essere costituito necessariamente da tanti termini, preferibilmente racchiusi tra parentesi, e non possa essere costituito di “un solo termine”.

I.: «Nell'esercizio sei arrivato a scrivere 16*x*. Secondo te questo è un prodotto di fattori come richiedeva il testo?»
L.: «No, questo no».
I.: «Perché?»
L.: «Perché c'è solo un termine!»
I.: «Siete d'accordo?»
G.: «No».
D.: «No, no. 16*x* è il risultato di una moltiplicazione: è 16 per *x*!»
L.: «Ah allora era giusto…»

Qui si nota di nuovo come lo studente pensi che il monomio 16*x* sia un'entità unica (usa il termine "risultato", che suggerisce un'interpretazione procedurale) che non può essere ulteriormente scomposta in nessun modo. Ciò potrebbe dipendere anche dalla tipologia di esercizi che sono stati proposti agli studenti in classe (e/o presenti sul libro di testo), ovvero potrebbe trattarsi di ostacoli didattici. Sebbene quindi la reinterpretazione delle relazioni aritmetiche in ambito algebrico possa portare all'insorgere di ostacoli epistemologici, ci si chiede se tali ostacoli possano, quantomeno, essere stati accentuati dalle pratiche didattiche.

5.3 Ostacoli didattici

Infine, analizziamo alcuni ostacoli che sembrano dipendere quasi esclusivamente dalle scelte didattiche attivate in classe, sottolineando ancora una volta la loro forte dipendenza dal contratto didattico che si è instaurato all'interno in classe, luogo in cui si dovrebbe attivare il processo di anticipazione. Per quanto riguarda lo studente, egli è portato a interpretare la situazione nella quale si trova, i quesiti che gli vengono posti e le informazioni date in modo consapevole o meno, creandosi delle regole che definiscono i rapporti all'interno della classe (Baccaglini-Frank et al., 2018).
Una strategia didattica che si può utilizzare per portare alla luce aspetti sconosciuti all'interno della classe è la rottura del contratto didattico, da noi messa in atto attraverso l'introduzione della domanda aggiuntiva per ogni quesito che richiedeva uno svolgimento alternativo, richiesta non usuale per gli studenti intervistati. La rottura del contratto ha provocato un primo ostacolo per gli studenti, con manifestazioni di insicurezza nello svolgere la prova: spesso non hanno neanche tentato approcci risolutivi meno usuali per paura di incorrere in errori. È emerso che, in generale, gli studenti tendono a proporre risoluzioni che hanno visto frequentemente, pensando che esse siano più corrette rispetto ad altre meno utilizzate, arrivando a volte a pensare che la soluzione di solito svolta in classe sia l'unica corretta da eseguire, come possiamo vedere dai protocolli nelle Figure 5-9. L'ambiente – in questo caso il fatto che l'esercizio sia svolto in classe – sembra agire come forte fattore inibente nella selezione delle risorse (conoscitive e materiali) da impiegare. Il desiderio di "far bene" secondo le aspettative del docente potrebbe agire come motivazione dominante, limitando così il richiamo dalla memoria e inibendo il ricorso ad altri piani d'azione – appresi, per esempio, in contesto aritmetico o risolvendo altre tipologie di equazioni.


Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$(x+1)^2-(x+2)=(x+1)(x+1)$

$\cancel{x^2}\cancel{+1}+2x-x-2=\cancel{x^2}+x+x\cancel{+1}$

$2x-x-2=x+x$

$2x-x-x-x=+2$

$-x=+2$

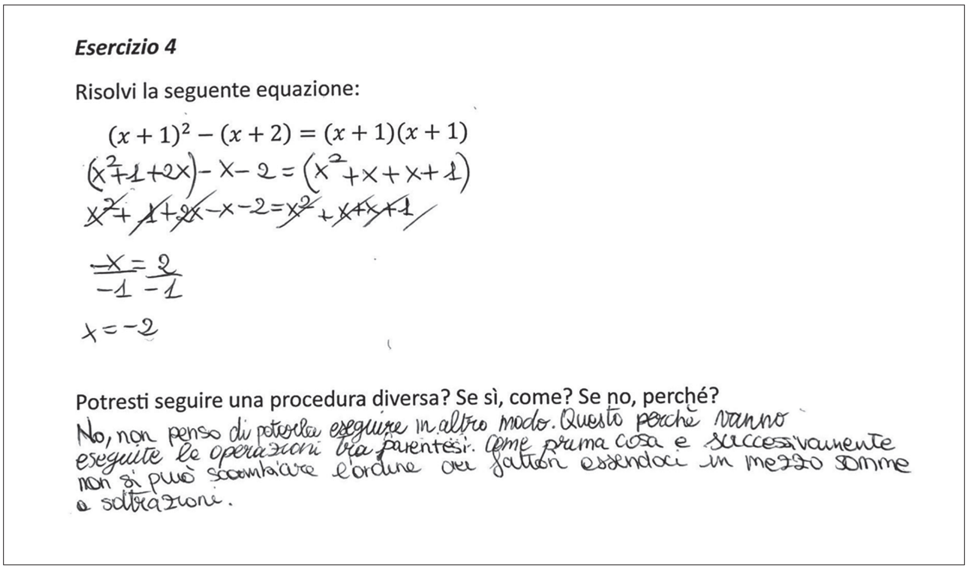
$x=-2$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No, perchè le equazioni si possono risolve solo in una modo.

Figura 5. Risposta di uno studente al quarto quesito del questionario.

Nel protocollo in **Figura 5** si nota come sia radicata l'idea che l'equazione si possa risolvere solo in un modo e non si possa trovare una soluzione alternativa, senza darne una motivazione precisa.
Altri studenti riportano invece giustificazioni del motivo per cui non possa esistere un procedimento alternativo, in modo molto dettagliato, elencando precisamente l'ordine dei passaggi che vanno eseguiti per risolvere l'equazione. Ne vediamo un esempio in **Figura 6**.



Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2-(x+2)=(x+1)(x+1)$$

$$(x^2+1+2x)-x-2=(x^2+x+x+1)$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{1}+\cancel{2x}-x-2=\cancel{x^2}+\cancel{x}+\cancel{x}+\cancel{1}$$

$$\frac{-x}{-1}=\frac{2}{-1}$$

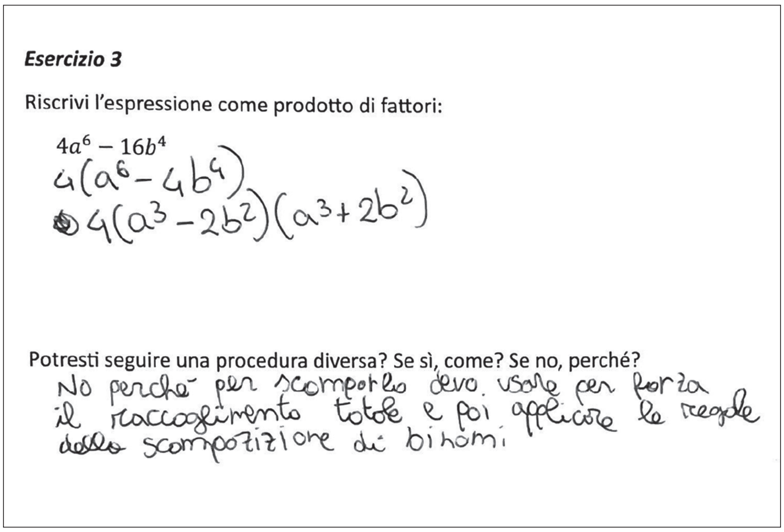
$$x=-2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No, non penso di poterla eseguire in altro modo. Questo perché vanno eseguite le operazioni tra parentesi. Come prima cosa e successivamente non si può scambiare l'ordine dei fattori essendoci in mezzo somme e sottrazioni.

Figura 6. Risposta di un altro studente al quarto quesito del questionario.

Apparentemente questo studente è in grado di anticipare il risultato atteso (della forma $x = N$ come nel caso mostrato in **Figura 3**) e di avviare un piano d'azione che tuttavia è l'unico possibile e non sembra dipendere dalla particolare forma dell'equazione analizzata. Sembra che lo studente non solo svolga ogni operazione in ordine, ma veda le parentesi come indicatori dell'ordine in cui gli oggetti vadano trattati piuttosto che come strumenti per mettere in evidenza sotto-strutture nell'espressione. Comportamenti analoghi si riscontrano non solo nella soluzione di equazioni, ma anche nelle altre tipologie di quesiti (**Figure 7** e **8**).



Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6-16b^4$$

$$4(a^6-4b^4)$$

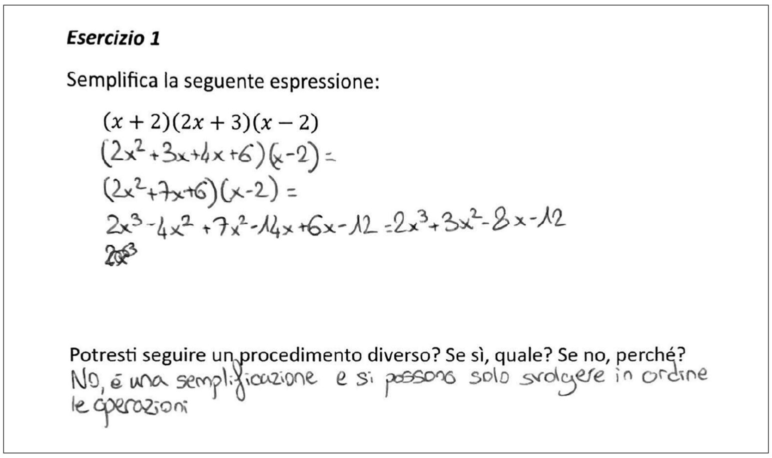
$$4(a^3-2b^2)(a^3+2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No perché per scomporlo devo usare per forza il raccoglimento totale e poi applicare le regole della scomposizione di binomi

Figura 7. Risposta di uno studente al terzo quesito del questionario in cui emerge un ostacolo didattico.

Nel caso mostrato in **Figura 7**, si ipotizza che sia presente un ostacolo dovuto (in modo più o meno esplicito) all'azione didattica che ha portato lo studente a convincersi della necessità di eseguire certe manipolazioni in un certo ordine. Si potrebbe comunque pensare che lo studente possa invece aver effettuato un'anticipazione prevedendo che un diverso ordine nelle manipolazioni avrebbe portato allo stesso esito finale.
Un altro esempio di "regola" che gli studenti hanno espresso è quella per cui per semplificare una data espressione si debbano necessariamente "svolgere le operazioni in ordine" (**Figura 8**).



Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$(x+2)(2x+3)(x-2)$

$(2x^2+3x+4x+6)(x-2) =$

$(2x^2+7x+6)(x-2) =$

$2x^3-4x^2+7x^2-14x+6x-12 = 2x^3+3x^2-8x-12$

$\cancel{2x^3}$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

No, è una semplificazione e si possono solo svolgere in ordine le operazioni

Figura 8. Risposta di uno studente al primo quesito del questionario in cui emerge un ostacolo didattico.

In questo caso lo studente sembra aver appreso questa procedura come regola da seguire ogni volta che incontra un'espressione da semplificare, non preoccupandosi dunque della struttura della specifica espressione oggetto di analisi, ma iniziando a svolgere l'operazione che trova per prima, proseguendo in questo modo finché non ha terminato di svolgere tutte le operazioni successive.
L'interpretazione data dei protocolli suggerisce che questi studenti non abbiano sviluppato la capacità di anticipare nel senso che le loro decisioni sul piano d'azione da attuare non dipendono in nessun modo dall'analisi della struttura dell'espressione per comprendere cosa ci si potrebbe aspettare come risultato finale: appaiono "ingabbiati" in una risoluzione strettamente procedurale focalizzata sulla corretta esecuzione delle operazioni (in un determinato ordine) fino ad arrivare al risultato finale.
I focus group confermano come alcuni studenti seguano delle regole in modo molto rigido, le quali li portano ad effettuare procedure in modo meccanico, senza analizzare ciò che stanno facendo nell'insieme, prevenendo così la possibilità di richiamare dalla memoria strategie alternative tra le quali scegliere il piano d'azione da realizzare. Dai dialoghi con gli studenti emergono queste loro convinzioni, probabilmente dovute al tipo di trasposizione didattica da parte del docente attuale o frutto dell'esperienza con docenti precedenti.
Queste azioni meccaniche e procedurali che gli studenti mettono in atto sono da collegare a un comportamento passivo nei confronti della risoluzione di un quesito e ciò potrebbe dipendere in buona misura dall'insegnamento. Verosimilmente, già dai gradi scolari precedenti, gli studenti non sono abituati ad utilizzare consapevolmente le parentesi come strumenti per organizzare la struttura dell'espressione e ad analizzare le mutue relazioni tra le sotto-strutture che esse individuano.
Dai focus group emerge come alcuni studenti entrino in confusione quando si chiede loro di trovare un modo alternativo per svolgere l'esercizio, poiché è radicata la convinzione che la matematica sia una sola e che essa detti delle regole ben precise e uniche per risolvere esercizi o problemi; non vedono la necessità di trovare strade alternative per arrivare alla soluzione e, mancando la motivazione, non attivano le risorse cognitive previste nel modello di Anokhin. Per esempio una studentessa,

commentando l'utilità della domanda aggiuntiva, dichiara: «A me mandava in confusione perché, se avevo trovato un modo, non capivo perché ci doveva essere un altro».
L'interpretazione che possiamo dare è che sia mancato l'incentivo da parte del docente ad utilizzare diverse strategie, a cercare di creare una base di esperienze pregresse su "procedimenti corretti e non" in modo tale che gli studenti possano sentirsi autorizzati ad utilizzarne più d'uno e, soprattutto, che siano resi consapevoli che possono individuare trasformazioni corrette anche se non coincidenti con lo svolgimento con cui l'insegnante procede abitualmente. Si osserva, però, che negli stessi esercizi, altri studenti delle medesime classi hanno utilizzato procedimenti alternativi, per esempio cambiando l'ordine dei fattori da moltiplicare o sfruttando l'uso del raccoglimento totale o parziale in base a ciò che ritenevano utile ai fini di raggiungere la forma anticipata e non seguendo determinate regole: hanno manifestato quello che Hoch e Dreyfus (2004) definiscono "senso della struttura". Questo suggerisce che questi ostacoli didattici possano esercitare il loro effetto solo in determinate condizioni, forse in interazione con ostacoli di altra natura, come notato nelle sezioni precedenti.
Nei focus group sono risultati interessanti i dialoghi tra studenti che cercavano di convincere altri sul fatto che l'insegnante non aveva fornito loro delle regole rigide da seguire, ma aveva semplicemente consigliato di svolgere determinati passaggi prima di altri; per esempio, in merito al fatto di controllare se si può fare il raccoglimento totale appena si osserva un'espressione, alcuni studenti affermano:

L.: «Boh mi hanno sempre detto che si doveva fare prima il [raccoglimento] totale e allora ho fatto il [raccoglimento] totale».
I.: «Quindi la professoressa ve l'ha data come regola di fare prima il [raccoglimento] totale?»
L.: «Sì!»
A.: «No, come regola proprio no!»
M.: «No».
A.: «No non ce l'ha mai detto, ha detto di farlo se possibile perché poi dopo è molto più facile trovare altri modi, ma non è obbligatorio farlo».
L.: «Sì però dice sempre che, se c'è [la possibilità di fare il raccoglimento] totale, si deve fare».
I.: «Diciamo che quindi vi consiglia di guardare prima se c'è da fare un raccoglimento totale e poi parziale e successivamente scomposizioni?»
L.: «Sì, esatto».

Si potrebbe quindi pensare che gli studenti interpretino le stesse parole dell'insegnante di matematica in modo diverso attribuendo ad esse, in molti casi, un significato coercitivo sulla base di convinzioni consolidate in gradi scolari precedenti o in contesti extra-scolastici.

6 Discussione e conclusioni

Ci siamo chiesti quali tipologie di ostacoli incontrano gli studenti di scuola secondaria nello sviluppo dell'anticipazione in contesto algebrico e come questi influenzino il processo di anticipazione stesso. L'analisi dei dati raccolti mediante la somministrazione di questionari e la realizzazione di focus group ci ha permesso di notare ostacoli di tipo ontogenetico, epistemologico e didattico probabilmente in stretta relazione tra loro, e che possono rendere il processo di anticipazione più o meno efficace.
Gli ostacoli di tipo ontogenetico sono legati allo sviluppo del singolo studente e abbiamo visto che possono effettivamente inficiare la correttezza del decision-making, per esempio quando si fa rife-

rimento a una manipolazione nota ma errata (si veda la **Figura 2**). Tuttavia, abbiamo anche visto che ostacoli di tipo ontogenetico non precludono necessariamente l'anticipazione (**Figura 3**). Se le manipolazioni risultassero inefficaci, gli interventi volti a far riflettere, soprattutto, sul loro senso (a livello della componente "azione" del modello di Anokhin), e un confronto sui risultati attesi potrebbero permettere di rimuovere questo tipo di ostacoli.

Potrebbe sicuramente essere più complesso affrontare gli ostacoli che emergono dal mettere in relazione la terminologia che gli studenti hanno già incontrato in contesto aritmetico con le operazioni di trattamento algebrico richieste. Questi ostacoli sembrano agire nel momento in cui lo studente deve confrontare il risultato ottenuto con quello atteso (come si è visto nel caso dei prodotti di fattori), bloccando il loop azione-risultato-confronto e fermando quindi il processo risolutivo. Questo tipo di difficoltà è ben noto in letteratura e sono altrettanto note le strategie didattiche volte a colmare questo gap epistemologico che, come abbiamo osservato, potrebbe essere esacerbato dalle pratiche didattiche. Questa osservazione ci porta a sostenere la posizione dei ricercatori che ritengono che attività di *early algebra* possano supportare lo sviluppo dell'anticipazione (si veda, ad esempio, Malara, 2009). Facendo riferimento ad alcuni degli esempi mostrati, sicuramente gli interventi didattici a supporto del recupero del significato del simbolo di uguaglianza o centrati sulle rappresentazioni non canoniche dei numeri (si veda, ad esempio, Navarra, 2022) possono supportare l'ampliamento dei possibili piani d'azione richiamati dalla memoria a supporto del processo di decision-making, oltre che evitare difficoltà legate alla mancanza di riconoscimento dell'equivalenza tra il risultato ottenuto in un passaggio intermedio e il risultato atteso (**Figura 4**). Come sostiene Radford (2010), per aiutare gli studenti nella fase di confronto del risultato ottenuto con quanto anticipato, occorre supportarli in quel lento processo di "addomesticamento" dell'occhio che permette di arrivare a vedere e riconoscere le cose secondo mezzi culturali efficienti; quel «processo che converte l'occhio (e gli altri sensi umani) in un sofisticato organo intellettuale – un "teorico"» (Radford, 2010, p. 4).

Tali tipologie di intervento potrebbero essere utili a prevenire gli ostacoli che sembrano avere radice nella didattica. Abbiamo visto come vari studenti manifestino la convinzione che in matematica le procedure siano rigide sia nei passaggi da effettuare che nell'ordine in cui questo deve avvenire. Queste convinzioni appaiono particolarmente problematiche per lo sviluppo dell'anticipazione perché inibiscono completamente l'avvio del ciclo di anticipazione già dalla fase di recupero delle informazioni: tale recupero avviene in base alle motivazioni dominanti che sembrano spesso essere quelle di soddisfare un certo contratto didattico piuttosto che trovare la soluzione del compito. Come sottolineato nel modello di Anokhin l'ambiente può stimolare il recupero di certe risorse (cognitive e materiali) o inibirlo. Gli studenti appaiono convinti della totale mancanza di necessità di decision-making da parte loro e ripetono pedissequamente i passaggi mostrati dall'insegnante, convinti che quella sia l'unica strada possibile. Abbiamo attribuito queste convinzioni a un contratto didattico (Brousseau, 2006) instaurato con il docente di classe attuale o con quelli precedenti. L'insorgere di clausole (implicite o esplicite) del contratto didattico di questo tipo potrebbe essere prevenuto con un insegnamento che stimoli la riflessione metalinguistica e metacognitiva. Si noti che il campione del nostro studio è costituito da studenti di liceo scientifico, ovvero studenti che hanno deliberatamente scelto una scuola in cui la matematica è più presente che in altri indirizzi scolari. Pertanto, si ritiene che la natura delle difficoltà presentate non sia principalmente attribuibile (quantomeno nella sua generalità) a incapacità, difficoltà cognitive o disinteresse verso la disciplina quanto piuttosto all'abitudine a risolvere senza riflettere sui significati (dei termini, delle frasi, delle consegne) o a confrontare strategie argomentando interpretazioni e congetture.

Chiaramente tali tipologie di intervento possono e dovrebbero iniziare molto presto (Navarra, 2022). Quando lo studente ha già maturato tali convinzioni, appare comunque possibile avviare un processo di devoluzione che potrebbe essere innescato proprio dalla rottura di alcune clausole di contratto didattico. La domanda aggiuntiva «Potresti seguire una procedura diversa?» sembra avere un alto potenziale in questo senso. In particolare, nel contesto dei focus group, la discussione su tale domanda

ha portato molti studenti a cambiare la propria posizione. Il confronto con i compagni ha modificato l'ambiente di svolgimento della consegna che, occasionalmente, ha portato a ripensare la propria posizione sui processi messi in atto.
La natura didattica di questi ostacoli suggerisce che potrebbe essere possibile prevenirli ma, quando ormai certe convinzioni si sono formate, sembra che un approccio socio-costruttivista all'apprendimento dei trattamenti algebrici possa permettere di intervenire. La limitata indagine illustrata in questo articolo già mette in evidenza che piccole variazioni dell'ambiente come le consegne (una domanda aggiuntiva nel nostro caso) e il setting d'aula (da lavoro individuale a discussione di gruppo) possano mostrare degli effetti. Ulteriori ricerche possono essere portate avanti per comprendere quali altre consegne potrebbero risultare efficaci (anche in termini quantitativi) per risolvere – o prevenire – gli ostacoli che qui siamo riusciti a mettere in evidenza e descrivere. In particolare, Boero (2001) mette in luce che uno degli elementi costitutivi dei processi di anticipazione è il significato attribuito alle espressioni algebriche che si stanno manipolando. Nel nostro caso, si sono utilizzati quesiti che facevano riferimento a manipolazioni fini a sé stesse. Diversamente, il significato di un'espressione algebrica può riferirsi al contesto di un problema o ai concetti condensati nelle rappresentazioni simboliche impiegate per congetturare, argomentare e dimostrare. Il modello di anticipazione presentato in questo contributo potrebbe essere utilizzato per analizzare consegne di tipo diverso per osservare come i contesti di argomentazione e problem solving influiscano sulla motivazione del solutore e quindi sul richiamo di possibili piani d'azione anche a seconda del significato che lo studente riesce a dare al contesto del problema (ovvero al quadro concettuale attivato nei termini di Arzarello et al., 2001). In particolare, in compiti in cui risulta centrale l'interpretazione (o meglio la significazione) di espressioni algebriche, il risultato atteso – determinato dal significato che è motivo della manipolazione – può informare il decision-making all'interno di tutto il loop azione-risultato-confronto.

Bibliografia

Anokhin, P. K. (1978). Anticipating reflection of actuality. In F. V. Konstantinov, B. F. Lomov & V. B. Schvyrkov (Eds.), *Philosophical Aspects of the Functional System Theory* (pp. 7–26). Nauka. (Titolo originale: *Operezhajuscheje otrazhenije deistvitel'nosti* pubblicato nel 1962 in *Filosofskije Aspekty Teorii Funktsional'noi Sistemy*).

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24–35.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 61–81). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_4

Baccaglini-Frank, A. E., Di Martino, P., Natalini, R., & Rosolino, G. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori università.

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 99–119). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_6

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990.* Springer Science & Business Media.

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, *51*, 45–65. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.006

Gagatsis, A., & Alexandrou, M. (2022). Una revisione della ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento dei numeri negativi: una "ricerca-azione" sull'applicazione del modello geometrico della linea dei numeri. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *11*, 9–32. https://doi.org/10.33683/ddm.22.11.1

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 49–56). PME.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 173–196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Malara, N. A. (2009). Dimostrazione e insegnamento dell'algebra. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *32*, 795–818.

Manion, L., Morrison, K. R. B., & Cohen, L. (2007). *Research Methods in Education.* Routledge.

Miragliotta, E. (2022). Geometric prediction: A framework to gain insight into solvers' geometrical reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *65*, 100927. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100927

Navarra, G. (2022). *Aritmetica e algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni: Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante.* UTET università.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 2–7.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.

Tooméla, A. (2015). Towards understanding biological, psychological and cultural mechanisms of anticipation. In M. Nadin (Ed.), *Anticipation: Learning from the Past. The Russian/Soviet Contributions to the Science of Anticipation* (pp. 431–456). Springer.

Vygotskij, L. S. (1980). *Il processo cognitivo.* Bollati Boringhieri.