

---

# *Matematica, Cultura e Società*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

LUCA MIGLIORINI, ROBERTO PAGARIA

## **I lavori di June Huh**

*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 8*  
(2023), n.2, p. 141–155.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI\\_2023\\_1\\_8\\_2\\_141\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2023_1_8_2_141_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



# I lavori di June Huh

LUCA MIGLIORINI

Università di Bologna

E-mail: luca.migliorini@unibo.it

ROBERTO PAGARIA

Università di Bologna

E-mail: roberto.pagaria@unibo.it

**Sommario:** *Una delle quattro medaglie Fields assegnate nel 2022 è stata vinta dal matematico June Huh, per i suoi contributi altamente innovativi alla combinatoria. I lavori di June Huh, oltre a risolvere brillantemente varie congetture aperte da molto tempo, creano un nuovo ponte tra la combinatoria e settori della matematica in apparenza molto distanti quali la topologia e la geometria algebrica. In questo articolo ci proponiamo di dare una introduzione il più possibile elementare alla combinatoria e di spiegare alcuni tra i principali risultati di Huh dando anche un’idea dell’originalità dei suoi metodi.*

**Abstract:** *One of the four Fields medals assigned in 2022 has been awarded to the mathematician June Huh for his highly innovative contributions to combinatorics. Huh’s papers, beside brilliantly solving several longstanding conjectures, build a new bridge between combinatorics and seemingly unrelated fields of mathematics such as topology and algebraic geometry. The purpose of this paper is to give an introduction, as elementary as possible, to combinatorics and explain some of Huh’s main results, as well as giving an idea of the innovativeness of his methods.*

## 1. – Introduzione

La medaglia Fields conferita a June Huh in occasione dell’ultimo congresso dell’Unione Matematica Internazionale tenutosi nel Luglio 2022, è un riconoscimento, oltre che delle eccezionali qualità scientifiche del premiato, dell’importanza del settore a cui J. Huh ha contribuito col suo lavoro: la combinatoria.

Possiamo dire, in modo molto approssimativo, che la combinatoria tratta di problemi di conteggio ed enumerazione di insiemi finiti. Ovviamente nei casi interessanti questi insiemi sono così grandi che è impossibile, o semplicemente poco significativo, contare i loro elementi direttamente e, ancora più che il conteggio esatto, interessa una comprensione della struttura matematica sottostante a tale conteggio.

Fa parte del fascino di questa disciplina il carattere elementare dei problemi, che si presta ad essere spiegato anche a chi non sia fornito di conoscenze

matematiche approfondite; carattere che contrasta spesso con la sottigliezza dei ragionamenti richiesti per risolverli. Diamo alcuni esempi di problemi di tipo combinatorio partendo da alcuni di carattere del tutto elementare:

**PROBLEMA 1.1 – Qualche conteggio elementare:** *Supponiamo di avere un alfabeto con  $n$  lettere. Il numero di parole di lunghezza  $r$  componibili con tale alfabeto è  $n^r$ . Tra queste  $(n)_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$  parole sono composte da lettere tutte distinte. In particolare, se  $r = n$  si ha  $(n)_n = n(n-1)(n-2)\dots(1) = n!$ , il fattoriale di  $n$ .*

*Chiaramente  $(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ . Dare una parola con  $n$  lettere distinte prese in un alfabeto di  $n$  lettere equivale a dare una funzione biunivoca  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ : La parola ha come prima lettera  $\sigma(1)$ , come seconda lettera  $\sigma(2)$  ecc... Una tale funzione si chiama **permutazione**. Come tutte le funzioni il cui dominio coincide col codominio, le permutazioni si possono comporre, per cui l’insie-*

---

Accettato: il 18 agosto 2023.

me delle permutazioni ha una struttura naturale di gruppo: si tratta del gruppo simmetrico  $\Sigma_n$  su  $n$  lettere, che come precedentemente detto ha  $n!$  elementi, ed è forse il gruppo finito più fondamentale della matematica.

Un insieme con  $n$  elementi, che indichiamo  $\{1, 2, \dots, n\}$  ha  $2^n$  sottoinsiemi<sup>(1)</sup>: si può infatti associare ad ogni sottoinsieme la parola di  $n$  lettere sull'alfabeto  $\{0, 1\}$  che ha un 1 in corrispondenza con gli elementi del sottoinsieme<sup>(2)</sup>, e siamo così ricondotti al primo esempio di questa serie. Il

celebre **coefficiente binomiale**  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$  conta invece i sottoinsiemi di cardinalità  $r$  di un insieme con  $n$  elementi. I coefficienti binomiali probabilmente vengono incontrati per la prima volta alle scuole superiori in termini di “triangolo di Tartaglia”, come coefficienti nello sviluppo della potenza di un binomio:  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ . Prendendo  $a = b = 1$  troviamo l'identità  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ , che ha una semplice interpretazione combinatoria in termini di sottoinsiemi dell'insieme  $\{1, \dots, n\}$ . I coefficienti binomiali sono ubiqui in matematica. Vedi le considerazioni di Stanley nel capitolo 1 di [Sta12].

Diamo adesso due classici esempi più interessanti:

**PROBLEMA 1.2 – Il problema degli “derangements” o “problème des rencontres”<sup>(3)</sup>** – Un **derangement**<sup>(4)</sup> è una permutazione  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow$

$\{1, \dots, n\}$  senza punti fissi:  $\sigma(k) \neq k$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ . Ad esempio se  $n = 2$  lo scambio 21 di 1 con 2 è un derangement, se  $n = 3$  i due derangements sono 231 e 312<sup>(5)</sup>. Il numero  $D_n$  di tali permutazioni può essere determinato applicando il cosiddetto principio di inclusione-esclusione<sup>(6)</sup>, e risulta:

$$D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! (-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \sim \frac{n!}{e}$$
 Più generalmente l'enumerazione delle permutazioni soggette a qualche tipo di restrizione è un soggetto classico della combinatoria.

Il seguente problema, risolto nel 1878 da W. A. Whitworth<sup>(7)</sup> evidenzia il legame tra combinatoria e probabilità:

**PROBLEMA 1.3** – Un'urna contiene le schede di una votazione. Ci sono  $p$  voti per il primo candidato e  $q$  voti per il secondo, e  $p > q$ . Ci si chiede di determinare la probabilità che durante lo spoglio i voti del primo candidato siano in ogni momento maggiori dei voti del secondo. Una possibile formulazione combinatoria del problema è la seguente. Abbiamo  $p+q$  estrazioni dall'urna. Per  $t = 1, \dots, p+q$  sia  $f(t)$  il numero dei voti all'istante  $t$  del primo candidato. Sappiamo perciò che  $f(p+q) = p$  e che, per ogni  $t$ , si ha  $f(t) \leq f(t+1) \leq f(t) + 1$ . L'insieme di queste funzioni è l'insieme dei possibili spogli dato il risultato finale di  $p$  voti al primo candidato. Questo insieme ha  $\binom{p+q}{p}$  elementi.

Tra tutte queste funzioni dobbiamo enumerare le funzioni che soddisfano in più la relazione  $f(t) > t - f(t)$ , per ogni  $t = 1, \dots, p+q$ , e confron-

<sup>(1)</sup> includendo anche i due sottoinsiemi non propri: il sottoinsieme vuoto e l'insieme stesso.

<sup>(2)</sup> si tratta della cosiddetta funzione caratteristica di un sottoinsieme: ad esempio se  $n = 5$ , e  $I = \{1, 3, 4\}$ , la parola corrispondente è 10110. La parola 00000 corrisponde al sottoinsieme vuoto. Una variazione di questa costruzione permette di contare il numero di collane con  $p$  perle ( $p \neq 2$  numero primo) di due possibili colori, che risulta essere uguale al numero di sottoinsiemi  $S$  di  $\{0, \dots, p-1\}$  tali che la somma degli elementi di  $S$  è un multiplo di  $p$ . Vedi [Sta12, Capitolo 1 Problema 105(b)] pg 136, 191.

<sup>(3)</sup> Il problema è stato posto nel 1708 da P.R de Montmort nel testo “Essay d'analyse sur les jeux d'hasard”.

<sup>(4)</sup> In letteratura non c'è una traduzione predominante per tale termine, le traduzioni predominanti sono dismutazione, scambussolamenti e permutazioni complete.

<sup>(5)</sup> Scriviamo una permutazione come sequenza di  $n$  numeri da 1 a  $n$  senza ripetizioni. Il  $k$ -mo elemento della successione è  $\sigma(k)$

<sup>(6)</sup> Tale principio è la generalizzazione della formula  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$  a più sottoinsiemi, c.f. [https://it.wikipedia.org/wiki/Principio\\_di\\_inclusione-esclusione](https://it.wikipedia.org/wiki/Principio_di_inclusione-esclusione).

<sup>(7)</sup> W. A. Whitworth è l'autore di uno dei primi testi di analisi combinatoria, “Choice and chance”, pubblicato per la prima volta nel 1867. Già dal titolo risulta l'origine probabilistica dei problemi combinatori trattati. Il libro, di grande qualità espositiva, ebbe grosso successo e fu ristampato più volte.

tare il loro numero con  $\binom{p+q}{p}$ . Tale probabilità risulta esser  $\frac{p-q}{p+q}$ ; questo fatto è un non facile esercizio che si può risolvere per ricorrenza.

Concludiamo con un problema geometrico, dall'apparenza innocente, che gioca un ruolo importante nel seguito (vedi capitolo 11 di [AZ18])

**PROBLEMA 1.4 – Enumerazione di punti, linee, piani etc** – Nel 1893 Sylvester pone il seguente problema: provare che non esistono configurazioni di un numero finito  $n$  di punti nel piano con la proprietà che la retta per una qualunque coppia di questi passi per un terzo<sup>(8)</sup>. Sono state date varie soluzioni a questo problema: è interessante per il seguito osservare che il problema non può seguire direttamente soltanto dagli assiomi di incidenza: la configurazione delle rette nel piano proiettivo sul campo con 2 elementi<sup>(9)</sup> fornisce un controesempio. Una conseguenza semplice di questo risultato è la seguente: dato un insieme di  $n$  punti non allineati, consideriamo l'insieme  $\mathcal{L}$  delle rette individuate dalle coppie di questi punti. Allora  $\mathcal{L}$  contiene almeno  $n$  rette. Il caso limite si ha quando  $n-1$  di questi punti  $p_1, \dots, p_{n-1}$  sono allineati. Si ha allora la retta che li contiene, e le  $n-1$  rette passanti per  $p_n$  e  $p_i$ . Questo risultato a differenza dei precedenti dipende solo dagli assiomi di incidenza, riducendosi a un corollario del seguente problema puramente combinatorio (noto come teorema di De Bruijn-Erdos [DBE48]): Siano  $A_1, \dots, A_m$  sottoinsiemi di un insieme  $X$  con  $|X|$  elementi, con la proprietà che ogni sottoinsieme di due elementi è contenuto in uno e un solo  $A_i$ . Allora  $m \geq |X|$ . Nel 1936, nella sua tesi, Motzkin congettura che ogni insieme finito  $X$  di punti in uno spazio proiettivo determina almeno  $|X|$  iperpiani, a meno che i punti di  $E$  siano contenuti in un

<sup>(8)</sup> Il testo originale è: Prove that it is not possible to arrange any finite number of real points so that a right line through every two of them shall pass through third, unless they all lie in the same right line.

<sup>(9)</sup> Vedi Esempio 4.1 per maggiori dettagli.

iperpiano. Questo risultato, dimostrato da Motzkin stesso nel 1951 e poi generalizzato da vari autori, ha ispirato la congettura top-heavy, (vedi Esempio 5.4) di Dowling e Wilson, la cui dimostrazione è uno dei risultati più importanti ottenuti da Huh e dai suoi collaboratori.

Nonostante problemi di tipo combinatorio appaiano fino dall'antichità, e nonostante le ricchissime interazioni della combinatoria con altri settori sia della scienza applicata che della matematica pura – citiamo tra gli altri la teoria degli algoritmi<sup>(10)</sup> quella della probabilità discreta<sup>(11)</sup>, la teoria della complessità computazionale, quella delle rappresentazioni di gruppi finiti – la combinatoria non ha goduto fino alla fine del XX secolo di grande prestigio presso la comunità matematica. Senza dubbio ciò è dovuto al predominio, durante tutto il ventesimo secolo, di un approccio più formalistico e strutturale all'algebra, iniziato dalla scuola tedesca e culminato nel gruppo francese Bourbaki<sup>(12)</sup>.

Nel suo intervento al International Congress of Mathematicians (ICM) di Nizza del 1970 G.C.Rota, senz'altro uno dei grandi propugnatori dell'importanza della combinatoria in matematica, scrive:

“Combinatorial analysis, or combinatorial theory, as it has come to be called, is currently enjoying an outburst of activity. This can be partly attributed to the abundance of new and highly relevant problems brought to the fore by advances in discrete applied mathematics, and partly to the fact that only lately has the field ceased to be the private preserve of mathematical acrobats, and attempts have been made to develop coherent theories, thereby bringing it closer to the mainstream of mathematics.” È interessante notare come Rota metta in rilievo lo spostamento in atto da una disciplina caratterizzata essenzialmente da problemi intricati che mettono alla prova il virtuosismo dei risolutori di problemi (i ma-

<sup>(10)</sup> cfr. D. Knuth “The art of computer programming”, o L. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, “Concrete Mathematics”

<sup>(11)</sup> cfr. lo spazio dato a problemi combinatorici nei primi capitoli del classico testo di W. Feller “An introduction to Probability theory and its applications”

<sup>(12)</sup> Il saggio di G.C.Rota “Combinatorics, representation theory and invariant theory: the story of a ménage à trois.” [Rot97] contiene molte interessanti osservazioni al proposito.



thematical acrobats) a disciplina con una struttura, delle teorie, degli strumenti. E continua: *By way of example of this second trend I shall sketch the outlines and prospects of perhaps one of the most promising of such infant theories: the theory of combinatorial geometries. This theory is historically rooted in the four-color conjecture much like algebraic number theory was born out of Fermat's conjecture.*

È esattamente in questa direzione che, a distanza di mezzo secolo dall'intervento di Rota, si situa il lavoro di J. Huh, di cui nel seguito di questo articolo cercheremo di introdurre alcuni temi<sup>(13)</sup>.

Le geometrie combinatorie di cui parla Rota sono un caso particolare di una nozione leggermente più semplice da definire, quella di **matroide**, una struttura caratterizzata da pochi semplici assiomi che si è dimostrata assai efficiente nell'unificare vari fenomeni matematici legati all'idea di indipendenza. Introdotta negli anni '30 indipendentemente da H. Whitney [Whi35] e da T. Nakasawa [NK09], assiomatizza simultaneamente la nozione di lineare indipendenza di vettori e di aciclicità in un grafo, oltre a vari problemi di conteggio, come quello della colorazione di un grafo che trattiamo nella Sezione 2.1<sup>(14)</sup>.

La medaglia Fields a J. Huh ci fornisce l'occasione per introdurre il lettore ad alcune delle tematiche combinatorie che riteniamo più affascinanti e di maggior rilievo di questo settore. Prima di esporre la nozione di matroide considereremo due esempi cruciali sia dal punto di vista storico che della loro rilevanza per il lavoro di Huh: parleremo perciò di grafi e del problema del conteggio delle loro colorazioni nella Sezione 2.1 e di arrangiamenti di iperpiani nella Sezione 2.2. Ci auguriamo che la discussione di questi esempi, oltre a mostrare la ricchezza e l'interesse dei problemi aperti in questa disciplina, motivi l'introduzione della nozione di matroide.

<sup>(13)</sup> Naturalmente la ricerca di Huh è ben più vasta e siamo costretti a sacrificare molti bellissimi risultati da lui ottenuti.

<sup>(14)</sup> Nella sua Laudatio [Kal22] per la Fields Medal a J. Huh, Gil Kalai scrive "Matroid theory is an example of both a highly successful abstraction and source of very useful and explicit examples."

## 2. – Due esempi: Grafi e arrangiamenti di iperpiani

### 2.1 – Grafi e loro colorazioni. Il polinomio cromatico

La teoria dei grafi costituisce uno dei settori più classici e importanti della combinatoria, e gioca un ruolo trainante nel tipo di problemi di cui parleremo. È pertanto opportuno dare alcune definizioni. Un **grafo** (finito)  $\Gamma$  è individuato da un insieme finito di vertici  $V$  congiunti da lati, il cui insieme si indica  $E$  (edges). Ogni lato unisce due vertici, che si dicono adiacenti. Non è escluso che questi due vertici coincidano<sup>(15)</sup>, così come non è escluso che più lati congiungano gli stessi vertici. Quando ciò non accade si dice che il grafo è semplice. Esempi di grafi sono il grafo completo  $K_n$  su  $n$  vertici, in cui ogni coppia di vertici distinti è congiunta da uno e un solo lato o il grafo bipartito su 3 coppie  $K_{3,3}$ <sup>(16)</sup>. Questo ha sei vertici divisi in due sottoinsiemi di tre vertici ciascuno, e ogni vertice di un sottoinsieme è adiacente a tutti e soli i vertici dell'altro sottoinsieme.

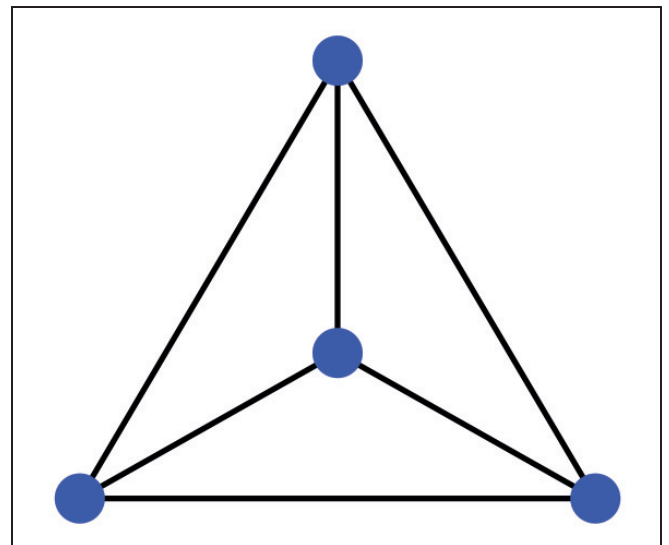


FIGURA 1 – Il grafo completo su 4 vertici.

<sup>(15)</sup> si dice in questo caso che il lato è un "loop".

<sup>(16)</sup>  $K_{3,3}$  e  $K_5$  non sono grafi planari, non possono essere cioè essere rappresentati sul piano senza che qualche lato si sovrapponga. Un celebre teorema di Kuratowski afferma che un grafo è planare se e soltanto se non contiene un sottografo di tipo  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

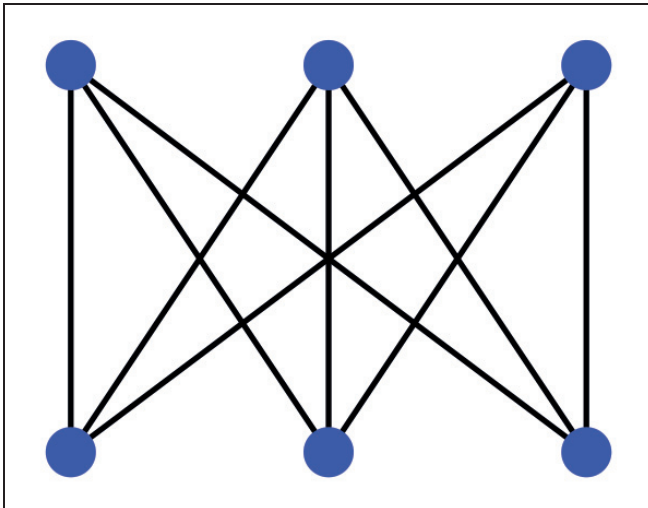


FIGURA 2 – Il grafo bipartito  $K_{3,3}$ .

Un **cammino** su un grafo è dato da una successione  $v_1 \ell_1 v_2 \cdots, v_{n-1} \ell_{n-1} v_n$  di vertici, ognuno adiacente al successivo, con  $\ell_k$  che congiunge  $v_k$  a  $v_{k+1}$ . Naturalmente la scelta di  $\ell_k$  è univoca se non ci sono lati multipli ed è in questo caso sufficiente indicare i vertici del cammino. Tale cammino si dice un ciclo se  $v_1 = v_n$ . Un grafo connesso che non contenga cicli (eccetto quelli banali ottenuti percorrendo un cammino e poi tornando indietro lungo lo stesso) si dice **albero**. Ogni lato di un grafo può essere orientato in due sensi. In certe questioni è opportuno orientare il grafo fissando per ogni lato un senso di percorrenza; in questo modo ogni lato ha un primo e un secondo vertice.

Si può associare a un grafo orientato  $\Gamma$  una matrice a coefficienti interi con le colonne indiciate dai lati e le righe indiciate dai vertici, mettendo sulla colonna corrispondente al lato  $\ell_k$  un  $+1$  in corrispondenza del primo vertice e un  $-1$  in corrispondenza del secondo<sup>(17)</sup>. Naturalmente se non si orienta il grafo si ha una matrice ben definita a coefficienti in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Dato un grafo  $\Gamma$ , con insieme di vertici  $V$  e di lati  $E$ , e data una tavolozza di colori che numeriamo  $\{1, \dots, n\}$  vogliamo colorare il grafo, associando a ogni vertice un colore, cioè un numero in  $\{1, \dots, n\}$ , in modo che vertici adiacenti abbiano colori diversi.

<sup>(17)</sup> a un loop si associa la colonna nulla.

Indichiamo con  $p_\Gamma(n)$  il numero di possibili colorazioni. Ad esempio, se consideriamo il grafo completo  $K_m$  è evidente che ogni vertice deve avere un colore diverso, essendo connesso a tutti gli altri. Ordinando i vertici in un qualsiasi modo abbiamo perciò  $n$  scelte per il colore del primo vertice,  $n - 1$  scelte per quello del secondo etc. Quindi in questo caso abbiamo  $p_{K_m}(n) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - m + 1)$ . I coefficienti di questo polinomio sono i numeri di Stirling, che compaiono spesso in problemi combinatorici. Gli zeri del polinomio per  $n = 0, 1, \dots, m - 1$  riflettono il fatto che sono necessari almeno  $m$  colori per colorare  $K_m$ . Se invece consideriamo un albero  $T_m$  con  $m$  vertici, è facile vedere che  $p_{T_m}(n) = n(n - 1)^{m-1}$ , dal momento che ogni vertice che non sia la radice dell'albero ha un unico predecessore. I coefficienti di questo polinomio sono perciò i coefficienti binomiali. Il polinomio si annulla per  $n = 0, 1$  riflettendo il fatto che sono necessari almeno due colori per colorarlo. Concludiamo con l'esempio del grafo  $K_{3,3}$ : i sei vertici sono divisi in due sottoinsiemi  $V_1$  e  $V_2$ , ognuno con 3 elementi. Poiché i vertici in  $V_1$  non sono adiacenti abbiamo  $n^3$  scelte. Di queste  $n(n - 1)(n - 2)$  hanno colori diversi, lasciando quindi una tavolozza con  $(n - 3)$  colori per i vertici di  $V_2$ , mentre  $3n(n - 1)$  hanno due colori, lasciando quindi una tavolozza con  $(n - 2)$  colori per i vertici di  $V_2$ , e ci sono infine  $n$  scelte di colori uguali per  $V_1$  che lasciano quindi  $n - 1$  colori per  $V_2$ . Quindi

$$\begin{aligned}
 p_{K_{3,3}}(n) &= n(n - 1)(n - 2)(n - 3)^3 + \\
 &+ 3n(n - 1)(n - 2)^3 + n(n - 1)^3 = n^6 - 9n^5 + \\
 &+ 36n^4 - 75n^3 + 78n^2 - 31n.
 \end{aligned}$$

Come negli altri casi osserviamo che l'annullarsi di tale polinomio per  $n = 0, 1$  riflette la necessità di almeno due colori per colorare il grafo.

Osserviamo che in questi casi il numero di colorazioni con  $n$  colori si ottiene valutando in  $n$  un polinomio a coefficienti interi. Questo è un importante fatto generale: per ogni grafo esiste infatti un polinomio a coefficienti interi,  $p_\Gamma \in \mathbb{Z}[X]$  detto **polinomio cromatico**, che, calcolato su un qualsiasi intero positivo  $n$ , dà il numero di possibili colorazioni di  $\Gamma$  con  $n$  colori. I coefficienti del polinomio hanno inoltre segni alterni:  $p_\Gamma(X) = a_n X^n - a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0$ , con  $a_i \geq 0$ . Nonostante il polinomio cromatico di un grafo

sia un importante invariante, è lungi dall'essere un invariante completo: grafi non isomorfi possono avere lo stesso polinomio cromatico come mostra l'esempio di due alberi con lo stesso numero di vertici.

**OSSERVAZIONE 2.1.** – *Abbiamo dato tre esempi semplici di calcolo diretto del polinomio cromatico. Questo in generale non è possibile. Un potente ausilio per il calcolo induttivo del polinomio è dato dalla seguente relazione (deletion-contraction). Essa fornisce anche uno strumento per provare che  $p_\Gamma$  è un polinomio. Sia  $\ell$  un lato, se  $\Gamma \setminus \ell$  indica il grafo ottenuto da  $\Gamma$  cancellando il lato  $\ell$ , e  $\Gamma/\ell$  quello ottenuto contraendo  $\ell$  a un punto, cosicché i due vertici incidenti a  $\ell$  vengono identificati, si ha:  $p_\Gamma(X) = p_{\Gamma \setminus \ell}(X) + p_{\Gamma/\ell}(X)$ .*

## 2.2 – Arrangiamenti di iperpiani

Un arrangiamento di iperpiani è una collezione finita di sottospazi vettoriali  $\{H_i\}_{i \in \mathcal{A}}$  di codimensione uno in uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita<sup>(18)</sup>. Per ogni  $i \in \mathcal{A}$  l'iperpiano è il luogo degli zeri di un elemento  $\phi_i \in V^*$ , determinato a meno di costante moltiplicativa. Scegliendo una base si può così associare una matrice ad un arrangiamento. Classici problemi sugli arrangiamenti riguardano, nel caso il campo sia i reali  $\mathbb{R}$  o i complessi  $\mathbb{C}$ , la topologia del complemento  $V \setminus \bigcup H_i$ . Nel caso reale tale complemento è un'unione di insiemi convessi per cui interessa solo il numero di componenti, nel caso complesso la questione è più interessante.

**ESEMPIO 2.2** – *Prendiamo la base canonica di  $\mathbb{K}^n$  e sia  $\{\phi_i\}$  la sua base duale. Il corrispondente arrangiamento di iperpiani è dato dagli iperpiani coordinati,  $H_i = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } x_i = 0\}$ . Questo è l'arrangiamento delle coordinate, la cui matrice associata è la matrice identità. Il complemento di tale arrangiamento si identifica con  $(\mathbb{K}^\times)^n$ . Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  questo consta di  $2^n$  componenti; se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  allora  $(\mathbb{C}^\times)^n$  è connesso e ha il tipo di omotopia di un toro  $n$ -dimensionale  $(S^1)^n$ .*

<sup>(18)</sup> Una classica referenza per l'argomento è [OT92].

**ESEMPIO 2.3** – *Sia  $V = \mathbb{K}^2$  con coordinate  $(x_1, x_2)$  e siano  $H_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \text{ t.c. } x_1 = 0\}$ ,  $H_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \text{ t.c. } x_2 = 0\}$ ,  $H_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \text{ t.c. } x_1 + x_2 = 0\}$ . Abbiamo quindi tre vettori linearmente dipendenti in  $V^*$ , a due a due indipendenti. La matrice associata è  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Se*

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  il complemento di tale arrangiamento consta di 6 componenti connesse.

Un importante invariante per spazi topologici è la coomologia. Essa è stata introdotta e studiata nella prima metà dello scorso secolo da importanti matematici come Henri Poincaré, James Waddell Alexander e Georges de Rham. Nel caso in cui lo spazio topologico sia una varietà, la coomologia a coefficienti reali (che ometteremo di indicare in quanto non useremo altri coefficienti) si può descrivere – usando il teorema di de Rham – come quoziente dello spazio delle forme differenziali chiuse modulo il sottospazio delle forme esatte

$$H^k(X) \simeq \frac{\{k\text{-forme chiuse su } X\}}{\{k\text{-forme esatte su } X\}}.$$

La somma diretta  $\bigoplus_k H^k(X)$  ha una struttura di algebra (graduata), cioè si possono moltiplicare tra loro le classi di coomologia: se si rappresentano le classi di coomologia con forme differenziali il prodotto corrisponde al loro prodotto esterno: date  $a = [\alpha] \in H^k(X)$  e  $b = [\beta] \in H^l(X)$  si ha  $ab := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(X)$ ; tale prodotto è associativo e commutativo in senso graduato. Nel 1980, Peter Orlik e Louis Solomon presentarono la coomologia del complemento di un arrangiamento di iperpiani [OS80]. Per ogni iperpiano  $H_i = \{\underline{x} \in \mathbb{C}^n \mid \phi_i(\underline{x}) = 0\}$  definito dalla forma lineare  $\phi_i$ , hanno considerato la forma differenziale

$$e_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{d\phi_i}{\phi_i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} d \log \phi_i$$

che è ben definita sul complemento  $V \setminus \bigcup H_i$ , chiusa ma non esatta<sup>(19)</sup>.

<sup>(19)</sup> Un calcolo esplicito mostra che la parte immaginaria di tale 1-forma è esatta, per cui  $e_i$  definisce effettivamente una classe di coomologia reale.



**TEOREMA 2.4.** – (Orlik, Solomon 1980) – *L'algebra di coomologia del complementare dell'arrangiamento  $\{H_i\}_{i \in \mathcal{A}}$  è generata dalle forme  $e_i$  per  $i \in \mathcal{A}$  con relazioni*

$$\sum_{j=1}^k (-1)^i e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{j-1}} \wedge e_{i_{j+1}} \cdots \wedge e_{i_k} = 0$$

per ogni insieme dipendente di vettori  $\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \dots, \phi_{i_k}$ .

Le relazioni del teorema di Orlik e Solomon sono sovrabbondanti; infatti basta considerare solo gli insiemi di indici  $C = \{i_1, \dots, i_k\}$  che siano dipendenti minimali per inclusione, cioè i circuiti.

**ESEMPIO 2.5** – *L'algebra di coomologia del complementare dell'arrangiamento dell'Esempio 2.2 è l'algebra esterna su  $n$  generatori. Infatti, gli iperpiani  $H_i$  sono il luogo di zeri dei vettori  $\phi_i \in (C^n)^*$ . Questi vettori formano la base canonica di  $(C^n)^*$  e quindi nessun loro sottoinsieme è dipendente. In particolare, non ci sono relazioni fra i generatori  $e_i$  per  $i = 1, \dots, n$ .*

**ESEMPIO 2.6** – *L'algebra di coomologia del complementare dell'arrangiamento dell'Esempio 2.3 è l'algebra*

$$\Lambda^*[e_1, e_2, e_3]/(e_2 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2).$$

Infatti, le tre colonne della matrice  $M$  sono linearmente dipendenti e l'insieme di indici  $\{1, 2, 3\}$  forma un circuito.

In seguito Corrado De Concini e Claudio Procesi hanno introdotto una compattificazione “meravigliosa” del complemento  $V \setminus \bigcup H_i$ . La compattificazione è una varietà algebrica complessa liscia e proiettiva  $Y_{\mathcal{A}}$  con un divisore <sup>(20)</sup>  $D \subset Y_{\mathcal{A}}$  tale che

$$Y_{\mathcal{A}} \setminus D \simeq V \setminus \bigcup H_i.$$

---

<sup>(20)</sup> Un divisore è una ipersuperficie non necessariamente irriducibile.

Inoltre si richiede che le componenti irriducibili di  $D$  siano lisce e si intersechino in modo particolare ( $D$  deve essere un “divisore a incroci normali semplici”). L'algebra di coomologia (e il tipo di omotopia razionale) del complemento  $V \setminus \bigcup H_i$  si possono descrivere esplicitamente a partire dalla compattificazione meravigliosa  $(Y_{\mathcal{A}}, D)$  [Mor78, DCP95, Yuz02, Yuz99]. Ciò fornisce una seconda dimostrazione del teorema precedente di Orlik e Solomon. Inoltre, questi risultati sono stati dimostrati nel contesto più generale degli arrangiamenti di sottospazi.

Questa varietà meravigliosa è notevole anche sotto altri aspetti. Una presentazione dell'algebra di coomologia della compattificazione  $H^*(Y_{\mathcal{A}})$  è stata data da De Concini e Procesi e successivamente definita in forma astratta da Feichtner e Yuzvinsky [FY04]. Oggi è nota come l'anello di Chow del matroide associato e lo discuteremo più nel dettaglio nella Sezione 8.

### 3. – Matroidi

La definizione di matroide si può dare in vari modi equivalenti tra loro. Ogni definizione mette in luce un aspetto interessante della nozione di matroide, pensiamo quindi che valga la pena dedicare del tempo a questo fatto: daremo tre definizioni <sup>(21)</sup>, in ognuna delle quali si seleziona una famiglia di sottoinsiemi di un insieme finito “di supporto”, che sono rispettivamente i sottoinsiemi indipendenti, le basi, i sottoinsiemi chiusi:

**DEFINIZIONE 3.1** – *Un matroide  $(M, \mathcal{I})$  è un insieme finito  $M$  con una famiglia  $\mathcal{I}$  di sottoinsiemi di  $M$  (i sottoinsiemi **indipendenti**) con le seguenti proprietà:*

1. *il sottoinsieme vuoto è indipendente*
2. *ogni sottoinsieme di un sottoinsieme indipendente è indipendente.*
3. *se  $I$  e  $J$  sono indipendenti, e  $J$  ha più elementi di  $I$ , esiste almeno un  $j$  in  $J$  che può essere aggiunto ad  $I$  in modo che  $I \cup \{j\}$  sia ancora un sottoinsieme indipendente.*

---

<sup>(21)</sup> Altre possibili definizioni sono mediante il sottoinsieme dei circuiti, la funzione rango, l'operazione di chiusura. Praticamente ogni testo introduttivo, come ad esempio [Oxl11] elenca queste definizioni e ne mostra l'equivalenza.

Si definisce base un insieme  $B$  indipendente massimale. Massimale significa in questo caso che qualunque sottoinsieme di  $M$  che contenga propriamente  $B$  non è indipendente: si mostra facilmente che tutte le basi di un matroide hanno lo stesso numero di elementi. Una definizione equivalente di matroide in termini dell'insieme delle basi è la seguente:

DEFINIZIONE 3.2 – Un matroide  $(M, \mathcal{B})$  è un insieme finito  $M$  con una famiglia non vuota  $\mathcal{B}$  di sottoinsiemi di  $M$  (le basi) con le seguenti proprietà:

1. Nessun sottoinsieme proprio di una base è una base.
2. Se  $B$  e  $B'$  sono due basi, per ogni  $b \in B$  esiste  $b' \in B'$  tale che l'insieme  $(B \setminus \{b\}) \cup \{b'\}$ , ottenuto da  $B$  togliendo  $b$  e sostituendolo con  $b'$  è una base.

Il lettore riconoscerà la relazione della seconda proprietà col teorema dello scambio (o lemma di Steinitz) che afferma che tutte le basi di uno spazio vettoriale di dimensione finita hanno la stessa cardinalità. Data la famiglia delle basi, si recupera quella dei sottoinsiemi indipendenti definendo un sottoinsieme di  $M$  indipendente se è contenuto in una base, dipendente altrimenti.

Si dice che un sottoinsieme  $A$  di un matroide  $(M, \mathcal{I})$  ha rango  $r(A)$  se contiene un sottoinsieme indipendente con  $r(A)$  elementi ma non contiene sottoinsiemi indipendenti più numerosi. Un sottoinsieme  $A$  si dice un **chiuso** se aggiungendo un qualsiasi elemento ad  $A$  il suo rango cresce. Si vede facilmente che ogni sottoinsieme di  $M$  è contenuto in un sottoinsieme chiuso minimale, spesso chiamato la sua chiusura. Questa costruzione è in stretta analogia con la nozione di Span di un sottoinsieme in Algebra Lineare. Ad esempio, se  $I \subseteq M$  è un insieme indipendente si considera il sottoinsieme  $F_I$  (“lo span di  $I$ ”) ottenuto aggiungendo a  $I$  tutti gli elementi di  $M$  “dipendenti da  $I$ ”: in questo modo  $I$  è un insieme indipendente massimale di  $F_I$ , vale a dire  $r(F_I) = r(I)$ . Tale  $F_I$  è un sottoinsieme chiuso ed è la chiusura di  $I$ .

La definizione di matroide si può formulare in modo equivalente, forse più suggestivo, in termini di sottoinsiemi chiusi. Per dare questa definizione premettiamo che se  $F \subsetneq G$  sono due chiusi, si dice

che  $G$  **copre**  $F$  se non ci sono chiusi che contengono propriamente  $F$  e sono contenuti propriamente in  $G$ . Questa condizione è equivalente a  $r(G) = r(F) + 1$ .

DEFINIZIONE 3.3 – Un matroide  $(M, \mathcal{F})$  è un insieme finito dotato di una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi detti **chiusi**, con le proprietà:

1.  $M$  è un chiuso,
2. l'intersezione di due chiusi è un chiuso.
3. Se  $F$  è un sottoinsieme chiuso, ogni elemento di  $M \setminus F$  appartiene a uno e un solo sottoinsieme chiuso che copre  $F$ : in altri termini, se  $F_1, \dots, F_l$  sono i chiusi che coprono  $F$ , gli insiemi  $F_1 \setminus F, \dots, F_l \setminus F$  sono una partizione di  $M \setminus F$ .

Passare da questa definizione di matroide a una delle precedenti è un esercizio divertente e non del tutto banale. Cerchiamo di dare un significato più concreto a questa definizione esibendo qualche esempio significativo:

ESEMPIO 3.4 – Se  $V$  è uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ , una lista <sup>(22)</sup>  $L := (v_1, \dots, v_N)$  di elementi di  $V$  definisce un **matroide vettoriale**, chiamando indipendenti le sottoliste di  $L$  linearmente indipendenti.

In questo caso una sottolista  $F \subseteq L$  è chiusa se ogni vettore  $v_i \notin F$  non è contenuto in  $\text{Span}(F)$ . La sottolista chiusa minimale contenente una sottolista  $A \subseteq L$  è  $\bar{A} = \text{Span}(A) \cap L$  (la chiusura di  $A$ ).

Prima di dare il secondo, fondamentale, esempio, ricordiamo che un *albero* è un grafo connesso che non contiene cicli. Una *foresta* è un grafo non necessariamente connesso le cui componenti connesse sono alberi.

ESEMPIO 3.5 – Dato un grafo finito  $\Gamma$  il **matroide grafico** a esso associato ha come insieme di supporto l'insieme  $E$  dei lati del grafo, e come sottoinsiemi indipendenti i sottoinsiemi di lati delle foreste contenute in  $\Gamma$ . Osserviamo, in particolare, che se  $\Gamma$  è connesso le basi sono gli alberi massimali (*spanning trees*) di  $\Gamma$ .

<sup>(22)</sup> una lista differisce da un sottoinsieme in quanto sono permesse ripetizioni.

A titolo di esempio descriviamo i sottoinsiemi chiusi del matroide grafico associato a un grafo  $\Gamma$  di insieme di lati  $E$ : un sottoinsieme  $F$  di lati è chiuso se non esistono lati  $e \in E \setminus F$  che connettono vertici che possono essere connessi da un cammino i cui lati siano contenuti in  $F$ .

Una classe interessante di matroidi, detti *trasversali* sorge da un problema di notevole interesse applicativo, quello dei matching:

**ESEMPIO 3.6** – Prendiamo un grafo  $\Gamma$  bipartito. Questo significa che si può dividere l'insieme dei vertici  $V$  in una unione di due sottoinsiemi  $V_1$  e  $V_2$  disgiunti, in modo che ogni lato abbia un vertice in  $V_1$  e uno in  $V_2$ . Un **matching** in  $\Gamma$  è un sottoinsieme  $M$  di lati di  $\Gamma$  senza vertici in comune. In questo modo si determinano due sottoinsiemi,  $I_1 \subseteq V_1$  e  $I_2 \subseteq V_2$ , con lo stesso numero di elementi, con la proprietà che ogni elemento in  $I_1$  è vertice di uno e un solo lato del sottoinsieme  $M$ , e lo stesso per gli elementi di  $I_2$ . Definendo un sottoinsieme  $I \subseteq V_1$  indipendente se esiste un matching che abbia  $I$  come insieme di vertici in  $V_1$  si ottiene una struttura di matroide sull'insieme  $V_1$  <sup>(23)</sup>

**OSSERVAZIONE 3.7.** – Dato un matroide  $(M, \mathcal{B})$ , si verifica facilmente che, definendo  $\mathcal{B}^{\vee}$  la famiglia dei complementari della basi, questa verifica ancora le due proprietà della definizione 3.2; si costruisce così un nuovo matroide  $(M, \mathcal{B}^{\vee})$  detto il **matroide duale**.

**ESEMPIO 3.8** – Il duale di un matroide grafico (cioè del tipo dell'esempio 3.5) si dice **matroide cografico** di  $\Gamma$ . Un fatto classico è il seguente: il matroide cografico di  $\Gamma$  è il matroide grafico di un altro grafo  $\Gamma'$  se e solo se il grafo  $\Gamma$  è planare. Nel matroide cografico gli insiemi indipendenti sono i sottoinsiemi di lati che possono essere tolti senza disconnettere il grafo.

Una **geometria combinatoria**, l'oggetto menzionato nella citazione precedente di Rota, è un matroide in cui ogni sottoinsieme di cardinalità al più due è

indipendente. Un matroide grafico, cioè del tipo del Teorema 3.5, è una geometria combinatoria se il grafo  $\Gamma$  di partenza non ha *loop* e lati multipli tra gli stessi due vertici. Un matroide vettoriale, cioè del Esempio 3.4, è una geometria combinatoria se ogni vettore  $v_i$  della lista  $L$  è non nullo e se ogni coppia di vettori  $v_i, v_j$  non è collineare.

#### 4. – Matroidi realizzabili e non realizzabili

Un matroide  $(M, \mathcal{I})$ , si dice **realizzabile sul campo**  $\mathbb{K}$  se è isomorfo a un matroide del tipo dell'Esempio 3.4, cioè se esiste una corrispondenza biunivoca degli elementi di  $M$  con le colonne di una matrice a coefficienti in  $\mathbb{K}$  in modo che i sottoinsiemi indipendenti di  $M$  corrispondano esattamente ai sottoinsiemi di colonne linearmente indipendenti della matrice. I matroidi presentati sopra sono esempi di matroidi "realizzabili". Esistono matroidi che non rientrano in questa tipologia:

**ESEMPIO 4.1** – Consideriamo il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  sul campo con due elementi  $\mathbb{F}_2$ , esso è formato da 7 punti e 7 rette. Ogni retta contiene esattamente 3 punti e per ogni punto passano 3 rette (cf Figura 3). La lineare indipendenza di questi vettori descrive il matroide di Fano. Usando i teoremi di Ceva e di Menelao si può dimostrare che il matroide di Fano è realizzabile solo su campi a caratteristica due.

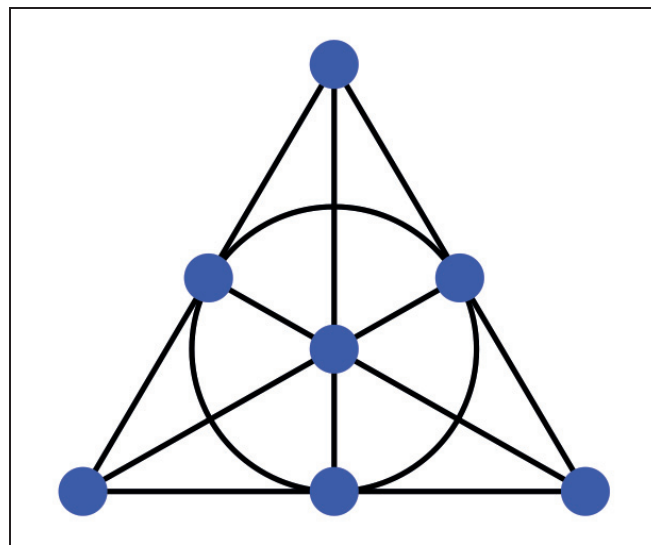


FIGURA 3 – La rappresentazione grafica del piano di Fano  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$  composto da 7 punti e 7 rette.

<sup>(23)</sup> In questo caso la verifica della terza proprietà degli insiemi indipendenti non è del tutto banale.

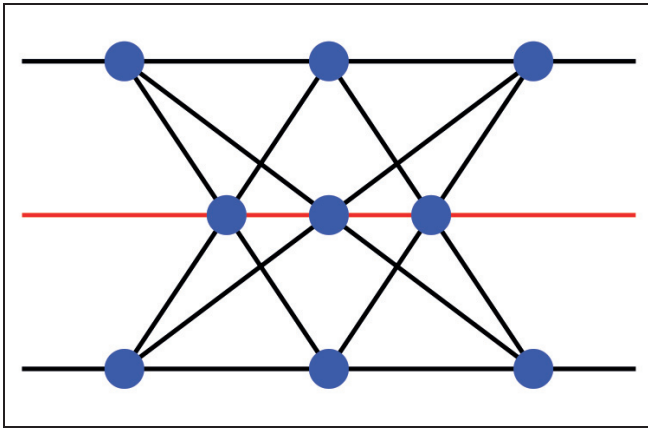


FIGURA 4 – Rappresentazione del teorema di Pappo.

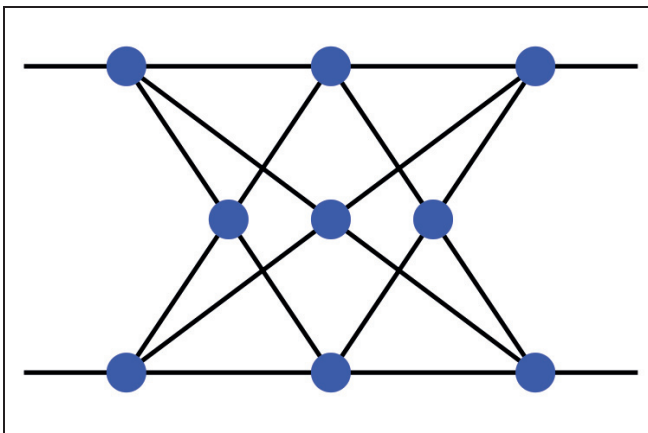


FIGURA 5 – Un matroide non Pappo; i tre punti al centro non sono collineari.

**ESEMPIO 4.2** – Consideriamo il matroide su 9 elementi le cui basi sono i sottoinsiemi di 3 elementi che non giacciono su un uno stesso segmento o sulla circonferenza in Figura 5. Tale matroide corrisponde alla configurazione di punti e rette sul piano di Fano  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ . Esso non è realizzabile su ogni campo; infatti il teorema di Pappo (cf Figura 4) asserisce che i tre punti al centro giacciono sulla stessa retta. Se esistesse una rappresentazione allora i tre vettori che descrivono i tre punti in questione sarebbero linearmente dipendenti. Ciò contraddice la definizione del matroide di questo esempio.

Combinando una stima di D. Knuth [Knu74] risalente agli anni '70 con una recente di Nelson [Nel18], si trova che in realtà i matroidi realizzabili costituiscono l'eccezione: il numero di strutture di matroide a meno di isomorfismo su un insieme di  $n$  elementi

ha ordine almeno  $\frac{1}{n!} 2^{\frac{1}{2n} \binom{n}{2}} \sim 2^{2^n}$  mentre il numero dei matroidi realizzabili su un insieme con  $n$  elementi ha ordine al più  $2^{\frac{n^3}{4}}$  per  $n \geq 12$ . Una congettura di Rota caratterizza, per ogni campo finito, la realizzabilità di un matroide in termini di un numero finito di "minori" esclusi, in un modo che ricorda il classico teorema di Kuratowski sulla realizzabilità di un grafo su una superficie. Importanti progressi in tale direzione sono stati compiuti da J. Geelen, B. Gerards e G. Whittle, vedi [GGW14].

## 5. – Il polinomio caratteristico di un matroide

Dato un matroide si pongono molti problemi di enumerazione, ad esempio: quanti sono i chiusi di rango fissato? Oppure, quanti insiemi indipendenti di cardinalità fissata ci sono? <sup>(24)</sup> Molte importanti proprietà enumerative di un matroide sono sintetizzate in un invariante, il polinomio caratteristico  $p_M(t)$ :

**DEFINIZIONE 5.1** – Dato un matroide  $M$ , il suo **polinomio caratteristico**  $p_M(t)$  è:

$$(1) \quad p_M(t) = \sum_{A \subseteq M} (-1)^{|A|} t^{r(M) - r(A)}$$

Se  $M$  è una geometria combinatoria, il polinomio caratteristico si può scrivere come somma sui sottoinsiemi chiusi:

$$p_M(t) = \sum_{F \subseteq M, F \in \mathcal{F}} \mu(\emptyset, F) t^{r(M) - r(F)},$$

dove  $\mu$  è la funzione di Mobius del insieme parzialmente ordinato dei chiusi.

Non è difficile vedere che  $p_M(1) = 0$ , per cui ha senso definire il polinomio caratteristico ridotto

<sup>(24)</sup> Questo problema contiene in particolare il problema di determinare la complessità del grafo, cioè il numero di alberi massimali di un grafo. Ad esempio un classico teorema di A. Cayley afferma che il grafo completo su  $n$  vertici contiene esattamente  $n^{n-2}$  alberi massimali.



$\widetilde{p}_M(t) := p_M(t)/(t-1)$ . I valori assoluti dei coefficienti del polinomio caratteristico si chiamano **numeri di Whitney di prima specie**.

OSSERVAZIONE 5.2. – Nella Sezione 2.1 abbiamo introdotto il polinomio cromatico  $p_\Gamma(t)$  per un grafo  $\Gamma$ . Esso è legato al polinomio caratteristico del matroide grafico  $M(\Gamma)$  dalla formula  $p_\Gamma(t) = t^c p_{M(\Gamma)}(t)$ , dove  $c$  è il numero di componenti connesse del grafo  $\Gamma$ .

OSSERVAZIONE 5.3. – Il polinomio di Poincaré di un arrangiamento di iperpiani in  $V = \mathbb{C}^n$  è definito da

$$p_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{k=0}^n \dim_{\mathbb{R}} H^k(V \setminus \bigcup \mathcal{A}) t^k$$

e codifica parte della struttura coomologica del complemento. Siano  $\phi_i$  i vettori duali che descrivono gli iperpiani  $H_i \in \mathcal{A}$  e  $M(\mathcal{A})$  il matroide vettoriale (vedi Esempio 3.4) descritto dai vettori  $\phi_i$ . Il polinomio di Poincaré di  $\mathcal{A}$  si ottiene dal polinomio caratteristico di  $M(\mathcal{A})$  invertendo l'ordine dei coefficienti, in formule  $p_{\mathcal{A}}(t) = t^{r(M(\mathcal{A}))} p_{M(\mathcal{A})}(t^{-1})$ .

Viene naturale chiedersi quali polinomi siano polinomi caratteristici di un matroide: una caratterizzazione completa sembra senza speranze. Nasce da ciò l'interesse a trovare proprietà dei coefficienti di questi polinomi. Esattamente in questo tipo di risultati si situano i contributi più innovativi di J. Huh, che stabiliscono la validità di congetture risalenti a molti anni fa.

ESEMPIO 5.4 – **Top-heavy conjecture**. Nel 1974 Dowling and Wilson [DW74, DW75] congetturano: sia  $\mathcal{L}^k$  l'insieme dei chiusi di rango  $k$  di un matroide di rango  $r$

1. Per ogni intero non negativo  $p$  minore di  $\frac{r}{2}$  si ha  $|\mathcal{L}^p| \leq |\mathcal{L}^{r-p}|$
2. Per ogni intero non negativo  $p$  minore di  $\frac{r}{2}$  si ha  $|\mathcal{L}^p| \leq |\mathcal{L}^{p+1}|$ .

Notiamo che si tratta di una vasta generalizzazione dei risultati discussi nel Problema 1.4. Questa congettura è stata dimostrata solo recentemente da Huh e coautori [BHM<sup>+</sup> 20, BHM<sup>+</sup> 23].

## 6. – Successioni unimodali e log-concave

Una successione  $(a_0, \dots, a_d)$  di numeri reali si dice **unimodale** se esiste  $0 \leq j \leq d$  tale che  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_d$ , se cioè i numeri crescono fino a un certo punto dopo il quale decrescono. La successione si dice **log-concava** se per ogni  $\ell = 1, \dots, d-1$  si ha  $a_\ell^2 \geq a_{\ell-1} a_{\ell+1}$ . La log-concavità di una successione positiva implica la sua unimodalità nel caso la successione non abbia zeri interni, cioè non esista un termine nullo preceduto e seguito da dei termini non nulli. Un risultato classico asserisce che se  $p(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_d T^d$  è un polinomio a coefficienti positivi che ha soltanto zeri reali allora la successione dei suoi coefficienti è log-concava.

OSSERVAZIONE 6.1. – La log-concavità della successione  $(a_0, \dots, a_d)$ , per  $a_i > 0$ , equivale al fatto che per ogni  $k$  la forma bilineare simmetrica di matrice  $A_k = \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_{k+1} \end{pmatrix}$  ha segnatura  $(1, 1)$  o è degenera.

Molte successioni di numeri che emergono naturalmente in combinatoria sono unimodali<sup>(25)</sup> o addirittura log-concave. Si vedano i due lavori di rassegna [Sta89, Bre94, Brä15] per un panorama.

ESEMPIO 6.2 – **Coefficienti binomiali e numeri di Stirling** – Come abbiamo detto, i coefficienti di un polinomio che ha soltanto zeri reali formano una successione log-concava. Da ciò segue immediatamente la log-concavità dei coefficienti binomiali e dei numeri di Stirling.

## 7. – Una fonte di successioni unimodali: la teoria di Hodge di una varietà algebrica

La geometria algebrica figura senza dubbio tra i settori della matematica che nel ventesimo secolo hanno avuto maggior sviluppo. Grande attenzione è

<sup>(25)</sup> Non tutte, però: La successione dei numeri di facce di un politopo convesso simpliciale contrariamente alle aspettative, non è unimodale. Esempi di politopi, di dimensione piuttosto grande, che non soddisfano questa proprietà sono dovuti a A. Björner.



stata dedicata in particolare allo studio delle proprietà topologiche delle varietà algebriche, per il quale ci si può avvalere dei potenti strumenti di tipo trascendentale forniti dalla teoria di Hodge. Cercheremo di descrivere alcuni risultati fondamentali di questo campo sorvolando sulle molte nozioni tecniche che sarebbero necessarie per darne una descrizione accurata. Una varietà algebrica complessa (proiettiva)  $X$  è il luogo di zeri di un insieme di polinomi omogenei a coefficienti complessi, considerato come sottoinsieme dello spazio proiettivo complesso  $P^n(\mathbb{C})$ . In quanto chiuso di una varietà compatta è un insieme compatto. Semplici esempi mostrano che questo spazio topologico può non essere una varietà topologica. Una varietà si dice liscia, o nonsingolare, di dimensione  $d$ , quando, vicino ad ogni suo punto, è definita da  $n - d$  polinomi la cui matrice jacobiana ha rango massimo.

In questi caso la varietà algebrica è anche una varietà differenziabile orientata, di dimensione reale  $2d$ . In quanto tale sono definiti i suoi gruppi di coomologia  $H^\bullet(X)$  che per semplicità considereremo a coefficienti reali, e identificheremo coi gruppi di coomologia di de Rham, come spiegato in 2.2. Vale la dualità di Poincaré, per la quale il duale di  $H^i(X)$  si identifica naturalmente con  $H^{2d-i}(X)$  per ogni  $i$ , che in particolare fornisce l'uguaglianza  $h^i := \dim H^i(X) = \dim H^{2d-i}(X) =: h^{2d-i}$  <sup>(26)</sup>. In altri termini la successione  $h^0, h^1, \dots, h^{2d}$  è palindroma. Una sottovarietà algebrica  $Y$  di  $X$  definisce una classe di coomologia  $[Y]$  in  $H^{2c}(X)$ , dove  $c = \dim X - \dim Y$  è la codimensione complessa di  $Y$ . In particolare, se si interseca  $X$  con un iperpiano dello spazio proiettivo ambiente, si ottiene una classe in  $H^2(X)$ . Le combinazioni lineari a coefficienti positivi di classi ottenute in questo modo si dicono **ampie** e il loro insieme, contenuto in  $H^2(X)$ , si dice il **cono ampio**. Le classi di coomologia sulla frontiera del cono ampio si dicono **NEF**. Come detto in 2.2, la somma diretta  $\oplus_k H^k(X)$ , ha una struttura di algebra (graduata). Per classi associate a sottovarietà che si

intersecano “bene” il prodotto in coomologia ha una naturale interpretazione geometrica: se  $Y$  e  $Z$  sono due sottovarietà algebriche di codimensione  $c_1$  e  $c_2$  rispettivamente, che si intersecano trasversalmente, cosicché  $Y \cap Z$  è una sottovarietà algebrica di codimensione  $c_1 + c_2$  e indichiamo  $[Y] \in H^{2c_1}(X)$  e  $[Z] \in H^{2c_2}(X)$  le loro classi di coomologia, il prodotto  $[Y][Z] \in H^{2c_1+2c_2}(X)$  è la classe di coomologia di  $Y \cap Z$ .

Un classico risultato di teoria di Hodge (il teorema “**Hard Lefschetz**”) asserisce che le due successioni di numeri di Betti  $h^0, h^2, \dots, h^{2d-2}, h^{2d}$  e  $h^1, h^3, \dots, h^{2d-3}, h^{2d-1}$  sono unimodali:

**TEOREMA 7.1.** – *Sia  $X$  una varietà algebrica proiettiva complessa liscia di dimensione  $d$ , e sia  $e = [\eta] \in H^2(X)$  una classe ampia. Allora, per ogni  $k$  la moltiplicazione per  $e^k$  definisce un isomorfismo tra  $H^{d-k}(X)$  e  $H^{d+k}(X)$  <sup>(27)</sup>. In particolare, la moltiplicazione per  $e$ , da  $H^i(X)$  in  $H^{i+2}(X)$ , è iniettiva per  $i \leq d - 1$  e suriettiva per  $i \geq d$ .*

Da questo segue facilmente l'unimodalità delle due successioni. Un altro risultato classico della teoria topologica delle varietà algebriche (Hodge-Riemann bilinear relations) produce analogamente successioni log-concave associate a classi di coomologia di varietà algebriche. Enunciamo una forma sufficiente per i nostri scopi:

**TEOREMA 7.2.** – *Sia  $X$  una varietà algebrica proiettiva complessa liscia di dimensione  $d$ , e siano  $a = [\alpha], b = [\beta] \in H^2(X)$  due classi NEF, cioè limiti di classi ampie. Allora, per  $k = 0, \dots, d$ , la successione  $a^k b^{d-k} = \int_X \alpha^k \beta^{d-k}$  è log-concava.*

Aggiungiamo per completezza che risultati analoghi al teorema di Lefschetz e alle disuguaglianze di Hodge-Riemann, anch'essi rilevanti per i recenti

<sup>(26)</sup> Più precisamente, l'applicazione

$$PD : H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \rightarrow \mathbb{R},$$

definita  $PD([\alpha], [\beta]) = \int_X \alpha \wedge \beta$ , ben definita per il teorema di Stokes, è non degenera e determina la suddetta dualità.

<sup>(27)</sup> Notare che i due spazi sono canonicamente uno il duale dell'altro, per la dualità di Poincaré, per cui il risultato si può anche enunciare così: per ogni  $k$ , la forma bilineare  $Q_k$  su  $H^{d-k}(X)$  definita

$$Q_k([\alpha], [\beta]) := \int_X \eta^k \wedge \alpha \wedge \beta,$$

è non degenera.

contributi di Huh, valgono per varietà singolari, a patto di sostituire la coomologia con un invariante topologico che si comporta meglio per varietà singolari, la coomologia di intersezione, definita nei primi anni '80 da M. Goresky e R. MacPherson [GM80, GM83]. Tale invariante è definito limitandosi a considerare catene che intersecano in modo controllato l'insieme delle singolarità della varietà. Si ha così, per ogni  $k$ , il gruppo di coomologia di intersezione  $IH^k(X)$ , dotato di una applicazione naturale  $IH^k(X) \rightarrow H^k(X)$ , che è un isomorfismo quando  $X$  è nonsingolare e il cui nucleo ha una caratterizzazione in termini di filtrazione dei pesi della struttura di Hodge mista su  $X$ . A differenza della coomologia, la coomologia di intersezione non ha una struttura di anello: non è possibile definire in modo ragionevole il prodotto di classi di coomologia di intersezione. È soltanto possibile moltiplicare una classe di coomologia con una classe di intersezione ottenendo una nuova classe di intersezione: in altri termini,  $\oplus_k IH^k(X)$  ha una struttura naturale di modulo graduato su  $\oplus_k H^k(X)$ . In compenso la coomologia di intersezione verifica la dualità di Poincaré, il teorema di Hard Lefschetz rispetto alla moltiplicazione per una classe ampia. Si presta pertanto a fornire esempi di successioni palindrome e unimodali.

**OSSERVAZIONE 7.3.** – *Sia  $X$  una varietà singolare, definiamo  $b_i = \dim H^{2i}(X)$  e supponiamo che l'applicazione naturale  $H^{2i}(X) \rightarrow IH^{2i}(X)$  sia iniettiva per ogni  $i$ . Mostriamo allora che*

$$b_i \leq b_j \text{ se } 0 \leq i \leq j \leq d - i.$$

*Sia  $e \in H^2(X)$  una classe ampia: se  $0 \leq i \leq j \leq d - i$  si ha che  $e^{j-i} : IH^{2i}(X) \rightarrow IH^{2j}(X)$  è iniettiva per il teorema di Lefschetz. Nel diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} H^{2i}(X) & \hookrightarrow & IH^{2i}(X) \\ \downarrow e^{j-i} & & \downarrow e^{j-i} \\ H^{2j}(X) & \hookrightarrow & IH^{2j}(X) \end{array}$$

*le frecce orizzontali sono iniettive per ipotesi, e deve quindi essere iniettiva la freccia verticale a sinistra. Si ha perciò  $b_i \leq b_j$ . Un argomento di questo genere è alla base della dimostrazione della congettura top-heavy nel caso realizzabile.*

## 8. – Alcuni risultati di J. Huh

Ad un matroide realizzabile può essere associata una varietà algebrica proiettiva liscia i cui numeri di Betti sono, a meno del segno, i coefficienti del polinomio caratteristico del matroide (cf [Huh12]). Si ottiene così una dimostrazione della loro unimodalità e, precisando opportunamente questa corrispondenza, della log-concavità della successione dei coefficienti. Questa dimostrazione, oltre a non essere puramente combinatoria, dovendo passare per il misterioso teorema Hard Lefschetz o le ancora più elusive disuguaglianze di Hodge-Riemann, copre soltanto il caso dei matroidi realizzabili, che come abbiamo visto sono una porzione minima dei matroidi. E. M. Feichtner e S. Yuzvinsky, nel 2004 [FY04] associano a ogni matroide un anello graduato, che nel caso realizzabile si riduce alla coomologia della varietà proiettiva associata al matroide. Adiprasito, Huh e Katz [AHK18] riescono a dimostrare che in questa generalità molto maggiore il teorema di Hard Lefschetz e le disuguaglianze di Hodge-Riemann valgono ancora. È come se la teoria di Hodge sopravvivesse anche in assenza di una varietà algebrica soggiacente. Un fenomeno analogo era stato verificato qualche anno prima da B. Elias e G. Williamson [EW14] nello studio delle congetture sui polinomi di Kazdan-Lusztig di un gruppo di Coxeter generale.

Cerchiamo di dare un'idea della costruzione di questo anello. Si introduce una indeterminata  $x_F$  per ogni sottoinsieme chiuso non banale del matroide, e si considera l'anello dei polinomi  $\mathbb{R}[\dots, x_F, \dots]$  in queste indeterminate. Si definiscono le relazioni  $x_F x_G = 0$  qualora i due sottoinsiemi chiusi non siano comparabili, cioè  $F \not\subseteq G$  e  $G \not\subseteq F$ , e, per ogni  $a, b \in M$ ,  $\sum_{a \in F} x_F = \sum_{b \in F} x_F$ . L'anello di Chow  $A(M)$  del matroide è per definizione il quoziente di  $\mathbb{Z}[\dots, x_F, \dots]$  per l'ideale generato da queste relazioni è un anello graduato, e indicheremo con  $A^i(M)$  il sottogruppo degli elementi di grado  $i$ . Vale il seguente notevolissimo teorema che afferma che l'anello di Chow di un matroide si comporta come la (parte pari della) coomologia di una varietà algebrica proiettiva liscia. Esso è stato dimostrato nel 2012 nel caso in cui il matroide  $M$  sia realizzabile su un campo a caratteristica zero [Huh12], in seguito esteso a matroidi rappresentabili su un qualsiasi campo [HK12] e infine in piena generalità in [AHK18]:

TEOREMA 8.1. – Sia  $A(M) = \bigoplus A^k(M)$  l'anello di Chow di un matroide di rango  $d + 1$ :

1.  $A^k(M) = 0$  per  $k > d$  ed esiste un isomorfismo  $\int : A^d(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ .
2. (Dualità di Poincaré) la moltiplicazione  $A^k(M) \times A^{d-k}(M) \rightarrow A^d(M) \simeq \mathbb{R}$  è una forma bilineare non degenera.
3. (Hard Lefschetz) Esiste un cono non vuoto  $C \subset A^1(M)$  tale che per ogni  $e \in C$  l'applicazione di moltiplicazione per  $e^{d-2k}$  definisce un isomorfismo tra  $A^k(M)$  e  $A^{d-k}(M)$
4. (relazioni bilineari di Hodge-Riemann) Sia  $P^k \subset A^k(M)$  il nucleo della moltiplicazione per  $e^{d-2k+1}$ , la forma bilineare simmetrica  $Q(a, b) = (-1)^k \int e^{d-2k} ab$  è definita positiva su  $P^k$ .

Questo teorema implica la log-concavità dei numeri di Whitney di prima specie, risolvendo così una congettura di Rota e Welsh degli anni '70. La relazione tra le proprietà dell'anello  $A(M)$  e i numeri di Whitney deriva dal seguente fatto, ben noto: preso  $m \in M$ , siano  $a, b \in A^1(M)$  definite da  $a := \sum_{m \in F} x_F$  e  $b := \sum_{m \notin F} x_F$ . Queste classi sono sulla frontiera del cono  $C$ , non dipendono in realtà dalla scelta di  $m$ , come si vede dalle relazioni definite sopra, e si può provare che  $\int (a^{d-k} b^k)$  è il valore assoluto del  $k$ -esimo coefficiente del polinomio caratteristico ridotto  $\widetilde{p}_M(t) = p_M(t)/(t-1)$ . Un corollario di questo teorema, anch'esso molto notevole, che risponde affermativamente a una congettura di Mason e Welsh, è che la successione  $\{f_k\}$  dei numeri di sottoinsiemi indipendenti di cardinalità  $k$  di un matroide è log-concava.

## 9. – Sviluppi ulteriori: la congettura top-heavy

Come accennato nell'osservazione 7.3, la congettura top-heavy si appoggia, anche nel caso realizzabile, a strumenti di geometria algebrica ben più sofisticati della teoria di Hodge classica. Miracolosamente anche questi argomenti, dopo un tour de force tecnico spettacolare, possono applicarsi nel caso non realizzabile, costruendo modelli puramente combinatorici della coomologia di intersezione e dimostrandone le sue proprietà.

Altri importanti lavori di June Huh, che non possiamo omettere di citare, riguardano la geome-

tria Lagrangiana dei matroidi [ADH23] e particolari classi di polinomi detti Lorentziani [BH20].

Una descrizione qui di questi risultati risulterebbe troppo lunga, ma speriamo comunque di aver fornito un'idea del meraviglioso lavoro di June Huh.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [ADH23] FEDERICO ARDILA, GRAHAM DENHAM, and JUNE HUH, *Lagrangian geometry of matroids*, J. Amer. Math. Soc. **36** (2023), no. 3, 727–794. 16
- [AHK18] KARIM ADIPRASITO, JUNE HUH, and ERIC KATZ, *Hodge theory for combinatorial geometries*, Ann. of Math. (2) **188** (2018), no. 2, 381–452. 15
- [AZ18] MARTIN AIGNER and GÜNTER M. ZIEGLER, *Proofs from The Book*, sixth ed., Springer, Berlin, 2018. 2
- [BH20] PETTER BRÄNDÉN and JUNE HUH, *Lorentzian polynomials*, Ann. Of Math. (2) **192** (2020), no. 3, 821–891. 16
- [BHM<sup>+</sup>20] TOM BRADEN, JUNE HUH, JACOB P. MATHERNE, Nicholas Proudfoot, and Botong Wang, *A semi-small decomposition of the chow ring of a matroid*, 2020. 12
- [BHM<sup>+</sup>23] \_\_\_\_\_, *Singular Hodge theory for combinatorial geometries*, 2023. 12
- [Brä15] PETTER BRÄNDÉN, *Unimodality, log-concavity, real-rootedness and beyond*, Handbook of enumerative combinatorics, Discrete Math. Appl. (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2015, pp. 437–483. MR 3409348 12
- [Bre94] FRANCESCO BRENTI, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry: an update*, Jerusalem combinatorics '93, Contemp. Math., vol. 178, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 71–89. 12
- [DBE48] NICOLAAS G. DE BRUIJN and PAUL ERDÖS, *On a combinatorial problem*, Indagationes Mathematicae **10** (1948), 421–423. 3
- [DCP95] CORRADO DE CONCINI and CLAUDIO PROCESI, *Wonderful models of subspace arrangements*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), no. 3, 459–494. 7
- [DW74] THOMAS A. DOWLING and RICHARD M. WILSON, *The slimmest geometric lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. **196** (1974), 203–215. 12
- [DW75] \_\_\_\_\_, *Whitney number inequalities for geometric lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975), 504–512. 12
- [EW14] BEN ELIAS and GEORDIE WILLIAMSON, *The Hodge theory of Soergel bimodules*, Ann. Of Math. (2) **180** (2014), no. 3, 1089–1136. 15
- [FY04] EVA MARIA FEICHTNER and SERGEY YUZVINSKY, *Chow rings of toric varieties defined by atomic lattices*, Invent. Math. **155** (2004), no. 3, 515–536. 8, 14
- [GGW14] JIM GEELLEN, BERT GERARDS, and GEOFF WHITTLE, *Solving Rota's conjecture*, Notices Amer. Math. Soc. **61** (2014), no. 7, 736–743. 11
- [GKP94] RONALD L. GRAHAM, DONALD E. KNUTH, and OREN PATASHNIK, *Concrete mathematics*, second ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994, A foundation for computer science.
- [GM80] MARK GORESKEY and ROBERT MAC-PHERSON, *Intersection homology theory*, Topology **19** (1980), no. 2, 135–162. 14

- [GM83] \_\_\_\_\_, *Intersection homology. II*, *Invent. Math.* **72** (1983), no. 1, 77-129. 14
- [HK12] JUNE HUH and ERIC KATZ, *Log-concavity of characteristic polynomials and the Bergman fan of matroids*, *Math. Ann.* **354** (2012), no. 3, 1103-1116. 15
- [Huh12] JUNE HUH, *Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs*, *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), no. 3, 907-927. 14, 15
- [Kal22] GIL KALAI, *The work of June Huh*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 28, 2022, <https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/Fields/2022/laudatio-jh.pdf>. 4
- [Knu74] DONALD E. KNUTH, *The asymptotic number of geometries*, *J. Combinatorial Theory Ser. A* **16** (1974), 398-400. 11
- [Knu11] \_\_\_\_\_, *The art of computer programming*, Addison-Wesley, Upper Saddle River, NJ, 1975 - 2011.
- [Mor78] JOHN W. MORGAN, *The algebraic topology of smooth algebraic varieties*, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* (1978), no. 48, 137-204. 7
- [Nel18] PETER NELSON, *Almost all matroids are nonrepresentable*, *Bull. Lond. Math. Soc.* **50** (2018), no. 2, 245-248. 11
- [NK09] HIROKAZU NISHIMURA and SUSUMU KURODA (eds.), *A lost mathematician, Takeo Nakasawa*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, The forgotten father of matroid theory. MR 2516551 4
- [OS80] PETER ORLIK and LOUIS SOLOMON, *Combinatorics and topology of complements of hyperplanes*, *Invent. Math.* **56** (1980), no. 2, 167-189. 7
- [OT92] PETER ORLIK and HIROAKI TERAOKA, *Arrangements of hyperplanes*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, vol. 300, Springer-Verlag, Berlin, 1992. 6
- [Oxl11] JAMES OXLEY, *Matroid theory*, second ed., Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 21, Oxford University Press, Oxford, 2011. 8
- [Rot97] GIAN-CARLO ROTA, *Combinatorics, representation theory and invariant theory*, pp. 39-54, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997. 3
- [Sta89] RICHARD P. STANLEY, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, *Graph theory and its applications: East and West (Jinan, 1986)*, *Ann. New York Acad. Sci.*, vol. 576, New York Acad. Sci., New York, 1989, pp. 500-535. 12
- [Sta12] \_\_\_\_\_, *Enumerative combinatorics. Volume 1*, second ed., *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. 1, 2
- [Whi35] HASSLER WHITNEY, *On the Abstract Properties of Linear Dependence*, *Amer. J. Math.* **57** (1935), no. 3, 509-533. MR 1507091 4
- [Yuz99] SERGEY YUZVINSKY, *Rational model of subspace complement on atomic complex*, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **66** (1999), no. 80, 157-164, *Geometric combinatorics (Kotor, 1998)*. 7
- [Yuz02] \_\_\_\_\_, *Small rational model of subspace complement*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), no. 5, 1921-1945. 7



Roberto Pagaria

Roberto Pagaria è RTDB in geometria presso il Dipartimento di Matematica dell'università di Bologna dal marzo 2023. I suoi interessi scientifici si situano all'incrocio tra combinatoria topologia e teoria delle rappresentazioni, con particolare riguardo per lo studio degli invarianti topologici di arrangiamenti.



Luca Migliorini

Luca Migliorini è professore ordinario di geometria presso il Dipartimento di Matematica dell'università di Bologna dal novembre 2001. Si interessa di topologia delle varietà algebriche e di spazi di moduli di fibrati di Higgs.