APhEx 7, 2013 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 26/09/2012
Accettato il: 12/03/2013
Redattore: Francesca Ervas

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK
N°7 GENNAIO 2013

T E M I

LA SPIEGAZIONE MATEMATICA

di Daniele Molinini*

ABSTRACT - *Il concetto di spiegazione matematica, benché sottoposto ad analisi filosofica fin dai tempi di Aristotele, ha recentemente assunto un ruolo chiave nel dibattito filosofico contemporaneo in filosofia della scienza e in filosofia della matematica. In quest'articolo introdurremo le linee generali della questione, dividendo innanzitutto l'analisi della spiegazione matematica nelle due aree principali che contraddistinguono il suo studio (spiegazione matematica nelle scienze empiriche e spiegazione matematica in matematica, rispettivamente). Illustreremo poi alcune tra le principali posizioni filosofiche che sono state sviluppate per catturare questa nozione, cercando di identificare alcuni criteri o caratterizzazioni tipiche della spiegazione matematica che sono state proposte nel dibattito contemporaneo. Infine mostreremo come lo studio della spiegazione matematica interessi dibattiti filosofici che riguardano aree diverse della filosofia della scienza e della filosofia della matematica.*

* Vari amici e colleghi hanno contribuito alla stesura di quest'articolo. Per l'aiuto e i preziosi consigli voglio ringraziare: Marco Panza, Paolo Mancosu, Chris Pincock, Bob Batterman, José Díez, Michèle Friend, Alan Baker, Mark Steiner, Steven French, Carl Hoefer, Andrea Sereni, Andrew Arana, Mic Detlefsen, Ivan Smadja, Jacques Dubucs, Valeria Giardino, Silva Fallavollita, Anna Colaiacovo, Marco Di Marco, Danilo Cinti, Giulia Rocco, Davide Crippa, Gerardo Nuñez, Melissa Paolini, Enrico Chinaski De Massis, Manuela Teti e Oscar Scoglio. I consigli e le osservazioni di due revisori anonimi sono stati di grande utilità per migliorare questo tema sotto vari aspetti. Un ringraziamento particolare va a Francesca Ervas e alla redazione di APhEx, per la pazienza che hanno avuto nell'aspettare il mio contributo e la grande disponibilità. Una prima versione di quest'articolo è stata scritta a Lima, Perù, tra dicembre 2011 e giugno 2012. L'affetto di Giuli e l'appoggio della sua famiglia sono stati essenziali per non perdere di vista il mio lavoro durante questi mesi difficili. Questo lavoro è dedicato a loro.

1. INTRODUZIONE

In quello che può forse considerarsi uno degli *incipit* più famosi della storia della filosofia, in apertura alla sua *Metafisica*, Aristotele afferma che gli uomini possiedono per natura il desiderio di conoscere. Spingendoci oltre, potremmo dire che questo desiderio di conoscenza riguarda due tipi di conoscenza ben distinti: la conoscenza *che* uno stato di cose sia tale e la conoscenza del *perché* quello stato di cose sia tale. Questa distinzione può essere colta se consideriamo dei semplici esempi. Probabilmente molte persone sanno *che* la Terra gira attorno al sole seguendo un'orbita (quasi) ellittica. Tuttavia, alcune persone potrebbero ignorare il *perché* di questo fenomeno. Ovvero esse non sanno che la Terra gira attorno al Sole, lungo un'orbita (quasi) ellittica, perché il Sole ha una massa molto maggiore della Terra ed esiste una forza, detta *forza gravitazionale*, che agisce mutualmente fra questi due corpi (come fra tutti i corpi presenti nel nostro universo). Allo stesso modo sappiamo tutti che, con un po' di fortuna, dopo un temporale vedremo formarsi nel cielo un doppio arcobaleno. Potremmo quindi domandarci il perché di questo fenomeno. In effetti, sapere che l'arcobaleno doppio si forma non vuol dire conoscere il perché quel fenomeno, i.e. la formazione del doppio arcobaleno, avvenga.[1] Entrambi i tipi di conoscenza (quella del *che* e quella del *perché* uno stato di cose sia tale) sono alla base delle nostre imprese e conoscenze scientifiche, questo è certo.

[1] Contrariamente a ciò che si possa pensare, offrire una risposta alla domanda "Perché si forma un arcobaleno?" non è così semplice. Questa risposta utilizza concetti e fenomeni definiti in ottica quali rifrazione, dispersione, riflessione interna, etc. Gli arcobaleni sono stati oggetto di studio fin dall'antichità, passando per Descartes e arrivando ai nostri giorni. Il libro *The Rainbow: From Myth to Mathematics* [1959] di Carl Boyer descrive, secondo una prospettiva storica, le tappe di quest'affascinante storia.

Una caratterizzazione che possa catturare il secondo tipo di conoscenza è associata con la nozione di *spiegazione* e rappresenta un *desideratum* particolarmente importante in scienza e in filosofia della scienza. In quest'articolo ci concentreremo sul problema di offrire una nozione adeguata di *spiegazione matematica*, problema che può essere visto come un sotto-problema del problema più generale di definire in che cosa consista una spiegazione in scienza o nella vita di ogni giorno.[2]

Il problema della spiegazione matematica nasce da un'osservazione molto semplice con cui ci confrontiamo quando siamo chiamati a rendere conto della pratica scientifica: vi sono casi in cui la funzione della matematica nelle scienze empiriche (i.e. le scienze naturali e quelle sociali), e in matematica stessa, non è semplicemente quella di rendere evidente il *che* di un fenomeno empirico (o di un fatto matematico) ma si estende a quella di far luce sul *perché* quel fatto empirico (o fatto matematico) avvenga (o sia da considerarsi vero, nel caso della matematica).[3] In altre parole, in queste situazioni la matematica sembra fornire una risposta alla domanda: "*Perché* il fenomeno F avviene?" (o, nel caso matematico, "*Perché* un particolare fatto matematico M è vero?"). La risposta fornita è quella che identifichiamo come *spiegazione matematica* del fenomeno F (o del fatto matematico M).

Naturalmente, messa in questi termini, sembra già che vi sia una nozione di spiegazione matematica di cui rendere conto, e che la differenza fra il *conoscere il che* e il *conoscere il perché* sia evidente per tutti. Purtroppo, come vedremo fra poco, non c'è un consenso su questo e vi sono filosofi che non concordano sul fatto che la matematica abbia la

[2] Per semplicità, in ciò che segue utilizzeremo il termine 'scienza' per riferirci alle scienze empiriche, ovvero alle scienze naturali e sociali.

[3] Per 'fatto matematico' intendiamo qui non solo un teorema, e più precisamente l'enunciato che lo contraddistingue, ma anche quei risultati (matematici) che possono essere provati matematicamente ma che non compaiono sotto forma di teoremi.

funzione, detta *esplicativa*, di svelare il perché uno stato di cose empirico o matematico "avvenga" (nel caso di un fenomeno) o "sia tale" (nel caso di un fatto matematico).[4] Per esempio, alcuni studiosi ritengono che la matematica abbia soltanto una funzione "rappresentativa" in scienza [Saatsi 2011], ovvero che essa rappresenti i fenomeni ma non spieghi il perché essi avvengano, mentre altri negano che nella pratica matematica si possa riconoscere un'attività il cui fine sia diverso da quello di giustificare un risultato e stabilire che un fatto matematico, ad esempio un teorema, sia vero. Joseph Melia, Chris Daly e Simon Langford sostengono, infatti, che il ruolo della matematica sia di "indicizzare" i fatti fisici, ad esempio permettendoci di isolare solo alcune caratteristiche o proprietà interessanti dei fenomeni in questione, e non quello di spiegarli [Melia 2000; Daly e Langford 2009]. Infine, se accettiamo l'idea che la spiegazione nelle scienze empiriche sia essenzialmente causale, in linea con quanto è stato proposto da filosofi come Wesley Salmon (cfr. voce "Causalità" di Federico Laudisa, *APhEx* 2012), è facile vedere come alla matematica possa essere negata ogni capacità di spiegare i fenomeni empirici. E questo perché le entità matematiche, essendo astratte, sarebbero prive di efficacia causale e dunque non avrebbero nessun ruolo esplicativo. Per quanto concerne la spiegazione matematica in matematica, ci confrontiamo con uno scenario pressoché identico. Alcuni filosofi, come per esempio Michael Resnik e David Kushner, ritengono che non esista nessuna distinzione fra dimostrazioni esplicative e dimostrazioni non-esplicative in matematica [Resnik e Kushner 1987]. Secondo questi autori lo studio della nozione di spiegazione matematica

[4] Qui ci stiamo riferendo implicitamente a due diverse concezioni della spiegazione matematica. Infatti, si può pensare che la funzione esplicativa della matematica possa essere caratterizzata attraverso una relazione che non dipende dalle categorie legate al soggetto che compie l'atto di spiegare. Oppure, diversamente, si può pensare che la relazione cercata sia dipendente da tali categorie e che quindi il ruolo del soggetto che spiega sia essenziale nel processo della spiegazione stessa.

in matematica non sarebbe interessante perché fondato su un'idea errata, i.e. l'idea che esistono dimostrazioni matematiche che spiegano perché un risultato sia vero.

Benché esistano filosofi che non riconoscano che la matematica abbia un potere esplicativo (in scienza e in matematica stessa), l'esistenza di spiegazioni matematiche è largamente riconosciuta nella letteratura e lo studio di una nozione adeguata di spiegazione matematica appare ormai sull'agenda di molti filosofi della scienza e della matematica [cfr. Mancosu 2008b, 2011; Cellucci 2011; Pincock e Mancosu 2012]. In ciò che segue lasceremo da parte le posizioni filosofiche che negano il potere esplicativo della matematica in scienza e in matematica, e assumeremo che esistono casi in cui la matematica possiede tale potere esplicativo. Tuttavia, nell'adottare questo *modus operandi*, dobbiamo tenere a mente che ci stiamo riferendo a tutta una letteratura contemporanea in filosofia della scienza e della matematica che ci autorizza a considerare il problema della spiegazione matematica come legittimo e meritevole della dovuta attenzione filosofica.

Chiariamo innanzitutto i due sensi di spiegazione matematica ai quali ci siamo riferiti finora: spiegazione matematica nelle scienze empiriche (SMS) e spiegazione matematica in matematica (SMM). Nonostante in entrambi i casi la matematica giochi un ruolo essenziale nella spiegazione fornita, SMS e SMM denotano due tipi di spiegazioni matematiche diverse [Hafner e Mancosu 2005]. Le prime, le SMS, sono spiegazioni nelle scienze empiriche che fanno uso della matematica e che non possono essere rese in termini causali. Le seconde, le SMM, sono spiegazioni fornite all'interno della matematica stessa. In seguito utilizzeremo l'espressione "spiegazione matematica" per indicare entrambi i due sensi, mentre specificheremo quando necessario. Per capire meglio la distinzione tra SMS e SMM, e comprendere meglio il nostro oggetto di studio, consideriamo rapidamente due esempi.[5]

1.1 Nidi d'ape e matematica: un esempio di spiegazione matematica in scienza

Il primo esempio riguarda un caso di SMS, e in particolare un caso di spiegazione matematica in biologia. L'esempio, analizzato inizialmente da Aidan Lyon e Mark Colyvan [Lyon e Colyvan 2008], è ormai diventato un caso classico di SMS ed è spesso discusso nel contesto della spiegazione matematica in scienza [cfr. Baker 2009a]. La situazione è la seguente. È noto che, all'interno dei loro nidi, le api costruiscono una struttura per contenere le larve della covata e per immagazzinare miele e polline. Questa struttura caratteristica, chiamata *favo* e fatta di cera, possiede una geometria molto precisa. Se osserviamo attentamente i nidi d'ape, infatti, scopriremo che tutti i favi presentano una struttura a celle esagonali. La domanda che il biologo, e più generalmente qualsiasi persona curiosa, si pone quando si confronta con questo fatto empirico, è la seguente: Per quale ragione il favo è composto da celle esagonali? In altre parole, vogliamo sapere perché un favo è sempre diviso in esagoni piuttosto che in qualche altro poligono, come ad esempio triangoli, quadrati, o in una combinazione di diversi poligoni (concavi o convessi). Ciò che stiamo cercando è, appunto, una spiegazione (possibilmente scientifica e non astrologica!) di questo bizzarro fenomeno biologico.

[5] Per ulteriori esempi di SMS e SMM rimandiamo a Molinini [2011], Pincock e Mancosu [2012], e naturalmente al *locus classicus* per qualsiasi studio sulla spiegazione matematica, ovvero la voce "Explanation in Mathematics" di Paolo Mancosu nella *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [Mancosu 2011].

Naturalmente, trattandosi di un esempio che riguarda l'interazione di una popolazione (le api) con l'ambiente circostante, risulta piuttosto naturale cercare una spiegazione in qualche principio biologico. Cosa ci dice la biologia a proposito? I biologi affermano che le api minimizzano la quantità di cera usata per costruire i loro favi. E questo perché l'atto di minimizzare il materiale impiegato nella costruzione è evolutivamente vantaggioso nella "struggle for existence", come peraltro afferma Darwin stesso in un passaggio delle *Origini* [Darwin 1998, p. 350]. Così, attraverso il meccanismo di selezione naturale, le api che minimizzano la quantità di cera utilizzata avranno più *chances* di essere selezionate rispetto alle api che spendono più energia costruendo celle con una quantità di cera maggiore. Questa osservazione, tuttavia, non ci offre una risposta definitiva alla nostra domanda di partenza, ovvero: 'Perché il favo è sempre diviso in esagoni, e non in altri poligoni o in una loro combinazione?'. Per rispondere a questa domanda, e ottenere quindi una spiegazione soddisfacente, dobbiamo abbandonare per un momento Darwin e (ri)aprire i nostri libri di matematica. Curiosamente, scopriremo che esiste un teorema matematico, detto appunto *teorema del favo* (in inglese *honeycomb theorem*), che ci dice che 'una griglia esagonale rappresenta il miglior modo di dividere una superficie in regioni di area uguale con un perimetro totale minimo'.[6] Questo risultato, rimasto una congettura matematica fino al 1999, anno in cui Thomas C. Hales trovò una dimostrazione e trasformò la congettura in teorema [Hales 2001], ci suggerisce che la soluzione a esagoni è la migliore possibile se vogliamo creare il massimo numero di celle con l'utilizzo della minima quantità di materiale. In pratica, se consideriamo la precedente osservazione biologica e il teorema

[6] Ricordiamo che per perimetro di un poligono si intende la misura del suo contorno. Nel nostro caso il perimetro totale è il contorno della figura piana formata da tutti gli esagoni del favo.

appena enunciato, otterremo una spiegazione del perché le api dividono il favo in esagoni piuttosto che in quadrati o in un'altra figura piana o composizione di poligoni diversi. Siamo dunque di fronte a una SMS. Infatti, la spiegazione del fenomeno biologico dipende essenzialmente da un fatto matematico, oltre che da alcuni fattori non matematici ma evolutivi che sono necessari, ma non sufficienti, a saziare la nostra curiosità scientifica. A questo punto potremmo chiederci: perché rivolgerci alla matematica e prendere in considerazione il teorema dimostrato da Hales quando si potrebbe, almeno in principio, tracciare una storia causale? In altre parole, perché non cercare una versione causale di questa spiegazione? Purtroppo, anche se fosse possibile tracciare la complessa sequenza di eventi causali che risultano nel reticolo esagonale, il nostro sforzo sarebbe piuttosto superfluo e non utile visto che, concentrandoci su un singolo caso (il favo A), perderemmo quella generalità che invece ci è garantita dalla matematica contenuta nell'*honeycomb theorem*. Perché infatti dovremmo tracciare una complessa rete di rapporti causali per una situazione specifica, ad esempio per la struttura del favo A al tempo *t*, quando il teorema dimostrato da Heiles interviene in tutti i casi interessanti (favi A,B,C, … ai tempi t_1,t_2,t_3 ...) e ci assicura una soluzione generale, soddisfacente, e anche piuttosto elegante per tutti questi casi? La spiegazione matematica fornita dall'*honeycomb theorem* ha la virtù di essere più generale di una (eventuale) spiegazione causale, e per questo essa è considerata da molti filosofi come *la* spiegazione del perché le api dividano il favo in esagoni piuttosto che in quadrati o in un'altra figura piana o composizione di poligoni diversi.[7]

[7] Naturalmente la questione del legame tra generalità e potere esplicativo meriterebbe analisi più ampie, che per ovvie ragioni di spazio non affronteremo qui. Questa tematica è affrontata in Steiner [1978a], Kitcher [1984] e Mancosu [2008b].

1.2 Bolzano e il teorema degli zeri di un polinomio: un esempio di spiegazione matematica in matematica

Dopo aver visto un caso di SMS, passiamo a considerare un caso di SMM, ovvero un caso di spiegazione matematica in matematica. Per ragioni di spazio e accessibilità di contenuti non riporteremo qui i dettagli della matematica in questione, né tutti gli aspetti filosofici che sono stati discussi in relazione a quest'esempio, ma rimandiamo a Kitcher [1975] e Mancosu [1999] per una discussione più esauriente.

Nel 1817 il matematico e filosofo Bernard Bolzano (1781-1848) pubblicò il suo *Rein analytischer Beweis* [Bolzano 1817].[8] In questo saggio, Bolzano critica la maniera in cui i matematici dell'epoca dimostrano un teorema matematico conosciuto oggi col nome di *teorema degli zeri di un polinomio*. Il teorema stabilisce che, per ogni funzione polinomiale a coefficienti reali che assuma segni opposti ai due estremi di un intervallo, esiste almeno una radice reale.[9] In pratica, se consideriamo un polinomio (ad esempio $y = 3x^3 + 2x^2 - 3$), ed esso assume segni opposti quando è valutato in due punti diversi (come avviene ad esempio per il nostro polinomio valutato in $y(0) = -3$ e $y(1) = 2$), il teorema ci assicura che esiste una radice reale all'interno dell'intervallo considerato (nel nostro caso la radice reale cadrà nell'intervallo [0,1]). Bolzano prova questo risultato come corollario di un teorema più generale, detto *teorema dei valori intermedi*, e lo fa attraverso una dimostrazione puramente analitica.

Il risultato stabilito dal teorema degli zeri di un polinomio era stato ottenuto fino allora offrendo dimostrazioni basate su considerazioni geometriche. In particolare, i

[8] Per una traduzione in inglese del saggio di Bolzano si veda Russ [1980]. In seguito, per citare i passaggi del saggio di Bolzano, ci riferiremo a questa traduzione.

[9] Il lettore interessato potrà trovare l'enunciato di tale teorema e la relativa dimostrazione in qualsiasi testo universitario di analisi I.

matematici spesso provavano questo teorema di analisi offrendo una dimostrazione che si basava sulla seguente verità geometrica: ogni linea continua di curvatura semplice le cui ordinate siano prima positive e poi negative (o prima negative e poi positive) deve necessariamente intersecare l’asse delle ascisse in qualche punto che si trova tra queste ordinate. Bolzano, tuttavia, ritiene che il derivare le verità della “matematica pura” (qui con l’espressione ‘matematica pura’ Bolzano intende l’aritmetica, l’algebra o l’analisi) da considerazioni che appartengono a una parte “pratica” della matematica, come lo è la geometria secondo Bolzano, rappresenta “un’offesa intollerabile contro il metodo corretto” [Russ 1980, p. 160, traduzione dell’autore]. Egli propone quindi una prova puramente analitica, ritenendo che una verità analitica debba essere dimostrata attraverso una dimostrazione che utilizza concetti analitici e non geometrici. In generale, l’intento di Bolzano nel suo saggio è quello di suggerire un modo di fare matematica diverso da quello che la pratica matematica aveva adottato fino allora. Naturalmente, benché interessante da un punto di vista storico e filosofico, questo programma non ci interessa qui e rimandiamo il lettore interessato agli studi citati in apertura di sezione. Ciò che ci interessa è che Bolzano considera che esiste una maniera di provare un teorema matematico che ci permette di accedere al *perché* il risultato stabilito da quel teorema sia vero. Infatti, egli ritiene che, contrariamente alle prove matematiche offerte fino allora (basate su considerazioni geometriche), la dimostrazione puramente analitica da lui offerta abbia il pregio di rendere evidente il *perché* il risultato matematico in questione, ovvero l’esistenza di almeno una radice per una funzione polinomiale particolare, sia vero. In altre parole, il matematico e filosofo Bolzano ammette che esistono casi di SMM.

Ci sembra necessario aggiungere una precisazione. La critica di Bolzano alla maniera di provare il teorema usando la geometria non mette in questione il fatto che le dimostrazioni offerte dai suoi contemporanei siano corrette da un punto di vista formale. E su questo Bolzano è piuttosto esplicito [Russ 1980, p. 160]. Il suo punto riguarda piuttosto la necessità di adottare una maniera di praticare la matematica e stabilire la verità di un enunciato matematico che vada al di là della validità formale di una dimostrazione e che offra le ragioni per cui, o il perché, un risultato matematico sia vero. In un saggio successivo, il *Wissenschaftslehre* [Bolzano 1837], Bolzano cercherà di giustificare questa distinzione fra prove che spiegano e prove che non spiegano il risultato, ovvero offrirà una teoria della spiegazione matematica [Mancosu 1999]. Nel fare ciò si appellerà a un'idea già presente negli *Analitici Posteriori* (I.13) di Aristotele e considererà che è solo provando un risultato analitico attraverso delle considerazioni analitiche che il matematico può svelare la "ragione oggettiva della verità in questione" [Russ 1980, p. 160, traduzione dell'autore]. Queste considerazioni, tuttavia, vanno oltre il contenuto della presente sottosezione. Il punto importante per noi è che Bolzano riconosce che esistono delle dimostrazioni che hanno potere esplicativo, ovvero ammette l'esistenza di SMM.

2. APPROCCI ALLA SPIEGAZIONE MATEMATICA

2.1 Problema dell'evidenza e strategie di analisi

Nella sezione precedente abbiamo offerto due esempi di spiegazione matematica, una SMS e una SMM rispettivamente. Probabilmente il lettore si sarà domandato su che base abbiamo offerto degli esempi di spiegazione matematica, visto che finora non abbiamo introdotto nessuna nozione di spiegazione matematica. In questa sezione chiariremo il perché abbiamo adottato questa strategia. Inoltre introdurremo alcune considerazioni metodologiche e terminologiche importanti. Infine, daremo al lettore una panoramica dei principali approcci alla spiegazione matematica.

Per dare al lettore una nozione intuitiva di spiegazione matematica abbiamo riportato due esempi di spiegazione matematica, rispettivamente in scienza e in matematica, e questo senza aver offerto nessuna nozione precisa di spiegazione matematica. Il dubbio di trovarsi di fronte a una qualche circolarità è quindi forte (i.e. siamo di fronte a una spiegazione matematica perché è una spiegazione matematica). In realtà, questa circolarità non esiste e lo stile di presentazione che abbiamo adottato risulterà chiaro una volta che avremo definito quello che qui chiameremo il ‘problema dell’evidenza’.

In generale, il ‘problema dell’evidenza’ (o meglio una possibile soluzione a questo problema) dovrebbe essere visto come punto di partenza per qualsiasi analisi della nozione di spiegazione, in scienza come in matematica. Esso consiste nello stabilire in base a quale evidenza, e secondo quale autorità, stiamo considerando che siamo di fronte a una spiegazione matematica *genuina*. In generale, vi sono due maniere diverse di affrontare questo problema, e ciascuna di esse corrisponde a una metodologia utilizzata nello studio della spiegazione matematica. La prima maniera consiste nel ritenere che la nozione di spiegazione matematica debba essere costruita, o elaborata, filosoficamente e che solo in seguito vadano cercate tracce di spiegazioni matematiche genuine nella pratica scientifica. In questo modo, l’evidenza di trovarsi di fronte a spiegazioni matematiche si ha quando il nostro modello filosofico riconosce come genuina una determinata spiegazione matematica. Quest’approccio alla spiegazione, che potremmo definire *philosophy-first* o *philosophy-driven* data la priorità che viene data all'analisi filosofica sulla pratica scientifica, è l'approccio adottato ad esempio da Hempel e Oppheneim nello studio della spiegazione scientifica [Hempel e Oppenheim 1948]. Nel contesto della spiegazione matematica, l'approccio *philosophy-first* è stato adottato dal filosofo contemporaneo Mark Steiner, come vedremo fra poco. Vi è poi un secondo modo di porsi di fronte al problema dell'evidenza. Esso consiste nel considerare che le intuizioni provenienti dalla pratica scientifica forniscono un indicatore della presenza di una spiegazione matematica genuina. A questa posizione corrisponde un tipo di approccio all'analisi della spiegazione che possiamo definire *practice-driven*, visto che, a differenza del primo tipo di approccio, considera che la pratica scientifica fornisce al filosofo delle linee guida necessarie per elaborare, in un secondo momento, una nozione di spiegazione matematica che possa rendere conto delle intuizioni degli scienziati. Quest'approccio è adottato da vari filosofi che si occupano di spiegazione matematica, come ad esempio Christopher Pincock e Robert Batterman [Pincock 2007; Batterman 2010], ed è attualmente l'approccio che sembra offrire maggiori spunti di analisi nello studio della spiegazione matematica [Mancosu 2008a; Molinini 2011]. Osserviamo qui che la metodologia di analisi detta *practice-driven* non è esclusiva dello studio della spiegazione matematica, ma è anzi adottata nello studio di altre questioni aperte in filosofia della matematica. Più generalmente, questa metodologia riflette una maniera di portare avanti l'indagine filosofica che si distanzia dai programmi fondazionali in filosofia della matematica [Tymoczko 1998, p. 95]. A tale proposito, rimandiamo il lettore interessato al recente libro *The Philosophy of Mathematical Practice* [Mancosu 2008a], i cui vari contributi offrono un'idea di come l'analisi filosofica possa trarre vantaggio dall'osservazione e dall'analisi della pratica scientifica.

Nella nostra esposizione, stiamo adottando il secondo punto di vista (*practice-driven*) e consideriamo che le intuizioni provenienti dalla pratica scientifica forniscono una qualche evidenza, o meglio un indicatore, di trovarci di fronte a spiegazioni matematiche genuine, di cui dobbiamo rendere conto filosoficamente. In effetti, la filosofia della scienza consiste (parlando a grandi linee) nello studio di concetti, pratiche e modi di teorizzare che sono propri della scienza. E potremmo pensare che essa abbia, principalmente, una funzione "descrittivo-normativa" e "interpretativa" [Díez e Moulines 2008, pp. 22-23]. Per funzione descrittivo-normativa s'intende qui la funzione che la filosofia della scienza ha di rendere esplicite le regole che sono alla base delle pratiche scientifiche e di utilizzarle in un secondo momento per dire se in altre pratiche scientifiche queste regole sono applicate correttamente o no.[10] Inoltre essa ha una dimensione interpretativa, ovvero si caratterizza per costruire modelli interpretativi dei costrutti scientifici (leggi, teorie, etc.) che vengono elaborati in scienza. La filosofia della scienza concettualizza e ricostruisce, ovvero interpreta il materiale dentro un certo schema concettuale che è ciò che chiamiamo *teoria*. Nell'analisi della spiegazione matematica condotta secondo una metodologia *practice-driven* è facile vedere come entrambe le funzioni, descrittivo-normativa e interpretativa, siano presenti. Mentre è difficile vedere come le stesse funzioni possano essere realizzate a pieno se adottiamo una metodologia *philosophy first* [cfr. Hafner e Mancosu 2005, 2008].

[10] Qui naturalmente la filosofia della scienza non è 'normativa' nel senso in cui essa impone una maniera di fare le cose in scienza senza tenere in considerazione la pratica scientifica.

2.2 Pluralismo e monismo

Naturalmente, il problema di avere una qualche nozione di spiegazione matematica rimane. Ovvero, anche se consideriamo che le intuizioni degli scienziati ci suggeriscono che siamo di fronte a spiegazioni matematiche genuine (come nel caso della spiegazione della struttura esagonale dei favi accettata da alcuni biologi o del teorema dimostrato analiticamente da Bolzano), dobbiamo rendere conto di questo indicatore ed elaborare una teoria, o perlomeno offrire una qualche nozione, di spiegazione. In fin dei conti in questo consiste il lavoro del filosofo, e sicuramente questo lavoro non deve esaurirsi in una semplice analisi sociologica della pratica scientifica. Passiamo quindi ora a considerare le analisi di SMS e SMM che sono state elaborate e che sono attualmente discusse in filosofia della scienza e della matematica. Ma prima introduciamo una terminologia che ci risulterà utile in ciò che segue. Chiamiamo *monisti* quegli approcci alla spiegazione che considerano che esiste un nucleo concettuale comune a casi diversi di spiegazione e che la nozione di spiegazione matematica possa essere catturata attraverso un modello unico in cui questo nucleo concettuale sia reso esplicito. Questo è l'approccio seguito da Mark Steiner e Philip Kitcher nei loro studi sulla nozione di spiegazione [Steiner 1978a; Kitcher 1989]. Vi è poi un approccio totalmente differente, detto *pluralista*, secondo cui esistono modalità diverse di spiegazione matematica e queste modalità non possono essere catturate *simpliciter* e attraverso un modello di spiegazione unico. In altre parole, adottando l'approccio pluralista si ammette che ciò che consideriamo come una spiegazione matematica genuina possa variare da caso a caso (i.e. esistono tipi diversi di spiegazioni matematiche) e che non sia possibile offrire un modello unico capace di catturare tutte queste istanze, o tipi, di spiegazione matematica (per esempio riconducendo ogni tipo di spiegazione matematica a un nucleo concettuale comune, i.e. una lista di proprietà necessarie – o perfino sufficienti – riscontrabili nella trattazione di un fatto empirico o matematico).

La storia della scienza sembra suggerirci che la maniera di spiegare matematicamente un fenomeno empirico o un fatto matematico varia a seconda del contesto scientifico, e che dunque la nozione di spiegazione matematica non possa essere ricondotta a una nozione statica come suggerito da un approccio monista radicale [Gingras 2001; Díez 2002]. Questa potrebbe essere una ragione per preferire un'analisi pluralista della spiegazione matematica. In effetti, l'analisi pluralista è l'alternativa che viene maggiormente adottata dai filosofi che si occupano di spiegazione matematica, ed è inoltre considerata da molti come la più adatta per rendere conto degli svariati casi di spiegazione matematica presenti in letteratura [Molinini 2011]. Va tuttavia precisato che, nel contesto della SMS, sono state elaborate almeno tre maniere diverse di analizzare la spiegazione matematica secondo un approccio pluralista. Il primo modo è suggerito da Christopher Pincock e Robert Batterman e consiste nel mettere in luce alcune modalità differenti di SMS e analizzarle senza pretendere che ogni caso di SMS sia conforme a esse [Pincock 2007a; Batterman 2010]. Il secondo modo è stato adottato da Johannes Hafner e Paolo Mancosu nei loro studi sulla spiegazione matematica [Hafner e Mancosu 2005, 2008]. Esso consiste nel cercare una classificazione delle diverse modalità di SMS che emergono dall'osservazione della pratica scientifica e dallo studio della storia della scienza. Una terza maniera, avanzata in Molinini [2011], consiste nel rendere conto delle diverse modalità di SMS attraverso delle categorie base che possano preservare le differenze sostanziali che esistono fra i vari tipi di SMS riscontrati nella pratica scientifica.

2.3 Approcci alla spiegazione matematica in scienza

Varie proposte sono state suggerite per catturare la nozione di spiegazione matematica in scienza, e la letteratura relativa si è notevolmente arricchita negli ultimi anni. Questi lavori differiscono molto tra loro per contenuti e strategie d'analisi, e sarebbe impossibile riportarli qui tutti in maniera esaustiva. Ci limitiamo quindi a fornire una breve ma essenziale panoramica degli approcci contemporanei alla SMS, focalizzandoci brevemente su due di questi approcci, quelli elaborati da Robert Batterman e Christopher Pincock nei loro studi sulla spiegazione matematica in scienza.

Nel suo articolo *Mathematics, Explanation and Scientific Knowledge* [Steiner 1978b], il filosofo Mark Steiner ha offerto quella che oggi viene considerata in filosofia analitica come la prima analisi sistematica della nozione di SMS. La strategia di Steiner nello studiare la SMS consiste nel mostrare come la nozione di SMS dipenda in realtà da quella di SMM, dove quest'ultima è offerta in un suo lavoro precedente (nella prossima sottosezione illustreremo brevemente la nozione di SMM offerta da Steiner). La spiegazione matematica in scienza viene dunque analizzata da questa prospettiva, e Steiner non si focalizza esclusivamente sulla nozione di SMS come invece fanno altri filosofi della scienza.

Robert Batterman, a differenza di Steiner, ha dedicato numerosi recenti articoli, e gran parte del suo libro *The Devil in the Details* [2002], allo studio della nozione di SMS. Batterman riconosce che la matematica gioca un ruolo esplicativo in scienza ma limita la sua analisi a una particolare forma di SMS che egli chiama *spiegazione asimptotica*

[Batterman 2002, 2010]. Come abbiamo già anticipato nella sottosezione precedente, Batterman assume una posizione pluralista nei confronti della spiegazione matematica in scienza. L'idea portante che appare nei suoi lavori è che esistono dei metodi matematici utilizzati in fisica, detti *metodi asimptotici*, che permettono di spiegare matematicamente alcuni fenomeni, o classi di fenomeni, fisici. In che modo? I metodi asimptotici eliminano alcuni dettagli causali del fenomeno sotto esame, tuttavia essi permettono, attraverso questo processo di eliminazione, di evidenziare ciò che è rilevante per spiegare il fenomeno in questione. In pratica, i metodi asimptotici (e il relativo ragionamento asimptotico, che lo scienziato segue quando utilizza tali metodi) permettono di spiegare matematicamente un fenomeno fisico poiché rendono evidenti le proprietà del sistema fisico che sono rilevanti a spiegare la particolare fenomenologia sotto esame. L'esempio classico riportato da Batterman riguarda la spiegazione, offerta in fisica dello stato solido, del perché fluidi di diversa struttura microscopica mostrano lo stesso comportamento quando raggiungono le loro rispettive temperature critiche. Questo fenomeno, detto *universalità*, viene spiegato attraverso il gruppo di rinormalizzazione, e più precisamente attraverso un'analisi matematica detta analisi *RGT* (*Renormalization Group Theory analysis*). Batterman considera che l'analisi offerta dal gruppo di rinormalizzazione sia un ottimo esempio di metodo asimptotico, e questo perché essa è effettivamente capace di dirci quali proprietà del sistema sono rilevanti per il comportamento critico dei vari fluidi. In pratica, la procedura matematica offerta dalla *RGT analysis* permette di dire perché, alle rispettive temperature critiche, questi fluidi si comportano in maniera simile. Il particolare tipo di spiegazione fornita viene chiamata da Batterman *spiegazione asimptotica* esattamente perché essa utilizza metodi asimptotici per rispondere alla domanda: Perché il fenomeno F avviene?[11]

Una posizione vicina a quella di Batterman è stata elaborata da Christopher Pincock [2004, 2007a]. Anche Pincock, come Batterman, adotta una posizione pluralista nei confronti della spiegazione matematica in scienza. Tuttavia, a differenza di Batterman, egli si focalizza su un particolare tipo di SMS che chiama *spiegazione astratta*. Una spiegazione astratta è una spiegazione (matematica) di un fenomeno empirico che "fa riferimento principalmente alle caratteristiche formali e relazionali di un sistema fisico" [Pincock 2007a, p. 257, traduzione dell'autore]. Inoltre, aggiunge Pincock, alcune spiegazioni astratte che utilizzano la matematica possono essere definite come *spiegazioni intrinseche*. E questo poiché in esse il tipo di funzione matematica (ad esempio un isomorfismo) che viene utilizzato per rappresentare (e spiegare) il sistema fisico attraverso la matematica non dipende da un sistema di misure arbitrario, ma riguarda solo alcune caratteristiche intrinseche del sistema fisico sotto esame.[12] Pincock considera che a volte esista un isomorfismo fra il sistema fisico sotto esame, o meglio fra alcune sue caratteristiche strutturali, e il modello matematico utilizzato per studiare e spiegare il fenomeno fisico ad esso associato. Nelle spiegazioni astratte, tale isomorfismo può essere stabilito prendendo in considerazione solo alcune proprietà intrinseche del sistema fisico, e tali caratteristiche sono indipendenti da un sistema di

[11] Naturalmente, questo breve riassunto non fa giustizia della posizione filosofica di Batterman, né della complessità del caso da lui analizzato. Per una trattazione più completa rimandiamo ai suoi studi, o al capitolo 6 di Molinini [2011], in cui l'esempio di Batterman e la sua concezione di spiegazione asimptotica sono considerate in dettaglio. Per una critica all'approccio alla spiegazione proposto da Batterman si vedano Belot [2005] e Bueno e French [2012].

[12] Un isomorfismo è una funzione biunivoca fra due insiemi, i.e. una funzione tale che ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme (e viceversa), che ha l'ulteriore proprietà di conservare le relazioni che esistono tra gli elementi dei rispettivi insiemi. In questo modo, due insiemi isomorfi risultano formalmente indistinguibili (se possono essere presi sotto una relazione adeguata, evidentemente).

misure arbitrario. Ad esempio, se prendiamo in considerazione un cubo di vetro, esso ha otto vertici e dodici spigoli, e questi vertici e spigoli sono in relazione fra loro. Utilizzando un modello matematico, come un grafo, potremmo rappresentare (attraverso un isomorfismo) queste caratteristiche e relazioni tra i vertici e gli spigoli del cubo di vetro, ed esse risulterebbero indipendenti da un sistema di misure arbitrario (ad esempio, il fatto che in ogni vertice si incontrano tre spigoli non dipende da nessun sistema di misure opportunamente scelto).

Come esempio di spiegazione astratta, e più in particolare di spiegazione intrinseca, Pincock considera il famoso problema dei sette ponti di Königsberg, già affrontato (e risolto) da Eulero nel 1735. Il problema è il seguente. Durante il XVIII secolo la città di Königsberg (l'attuale Kaliningrad) era formata da quattro zone di terraferma separate dal fiume Pregel, e queste zone erano connesse tra di loro da sette ponti. Sarebbe stato possibile, per qualcuno che avesse voluto passeggiare per la città attraversando tali ponti, seguire un percorso che attraversasse ogni ponte una e una volta soltanto e che lo facesse tornare al punto di partenza? Per semplicità, chiamiamo tale passeggiata un *tour Euleriano*. Servendosi di un argomento matematico, Eulero dimostrò che non era possibile portare a termine questo tour. Alla stessa conclusione si può arrivare se trattiamo il problema attraverso una particolare teoria matematica detta *teoria dei grafi*. Senza entrare nei dettagli matematici della questione, possiamo dire che il sistema fisico zone-ponti può essere formalizzato attraverso la teoria dei grafi, identificando ogni distinta zona della città (sono 4) con un vertice della struttura matematica grafo, e ogni ponte (sono 7) con un collegamento tra due vertici del grafo in questione. Diciamo che un vertice (o nodo) del nostro grafo ha grado n se su quel vertice arrivano n

collegamenti. Adesso, un teorema della teoria dei grafi ci assicura che il tour Euleriano è possibile lungo i collegamenti di un grafo se e solo se tutti i vertici di quel grafo hanno grado pari. Tuttavia, nel caso specifico del grafo che formalizza il problema dei sette ponti di Königsberg, almeno uno dei vertici ha grado dispari (effettivamente il lettore potrà verificare che tutti i vertici hanno grado dispari, 3 o 5). Questo ci assicura che il tour Euleriano non può essere realizzato. Riferendosi a quest'esempio, Pincock sostiene che la matematica della teoria dei grafi, e più precisamente un particolare teorema, ci dice perché questa passeggiata sia impossibile: mappando alcune caratteristiche formali del sistema fisico zone-ponti nella struttura grafo, abbiamo la possibilità di studiare matematicamente le relazioni che intercorrono tra queste caratteristiche e mettere in luce, alla fine del processo, il perché dell'impossibilità di compiere un tour Euleriano. Questo perché è offerto in termini della struttura (astratta) vertici-collegamenti, che è una rappresentazione matematica della struttura (concreta) zone-ponti. È facile dunque vedere in che senso parliamo di spiegazione astratta come di una SMS. Il ruolo della matematica è infatti essenziale per spiegare l'impossibilità di compiere un tour Euleriano.

Mauro Dorato e Laura Felline, elaborando ulteriormente la nozione di *spiegazione strutturale* avanzata nei lavori di R. I. G. Hughes [1989a, 1989b] e Robert Clifton [1998], sostengano che la meccanica quantistica e la relatività speciale offrano spiegazioni matematiche genuine di alcuni fenomeni fisici (quantistici e relativistici) e che queste spiegazioni siano catturate adeguatamente dal modello di spiegazione strutturale [Dorato e Felline 2011; Felline 2011]. Come nel caso delle spiegazioni astratte proposte da Pincock, anche le spiegazioni strutturali sono definite in base a una relazione di rappresentazione esistente tra il sistema fisico sotto esame e un modello matematico (ad esempio un modello matematico usato in meccanica quantistica). Abbiamo una spiegazione strutturale quando, trovata una relazione di rappresentazione fra il sistema fisico e il modello matematico, possiamo studiare il modello matematico e apprendere qualcosa di nuovo circa il sistema fisico da cui siamo partiti. Sono infatti proprio le proprietà formali del modello matematico che ci permettono di mettere in luce alcune proprietà dell'*explanandum* che ci interessano. In Dorato e Felline [2011], per offrire un esempio di spiegazione strutturale, gli autori considerano che le relazioni di indeterminazione di Heisenberg tra la posizione e il momento di una particella, espresse dalla famosa equazione $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, siano spiegate dalle proprietà matematiche/formali della trasformata di Fourier. In che modo? Nella teoria quantistica è possibile rappresentare un sistema attraverso un modello (matematico) di spazi di Hilbert di funzioni a quadrato sommabili, e in questo modello la funzione $\Psi(p_x, p_y, p_z)$ è la trasformata di Fourier della funzione $\Psi(x, y, z)$. Queste due funzioni rappresentano, rispettivamente, i due osservabili momento e posizione della particella nel modello matematico. La famosa equazione che esprime le relazioni di indeterminazione tra la posizione e il momento risulta dalle proprietà matematiche della trasformata di Fourier, e dunque alla domanda `Perché la posizione e il momento non assumono simultaneamente grandezze definite?' possiamo rispondere: 'Perché i corrispettivi (formali/matematici) della posizione e del momento, nel modello matematico, hanno una proprietà che rende ciò impossibile'.

Un altro approccio alla spiegazione matematica in scienza è stato offerto, più recentemente, in Molinini [2011]. Molinini sostiene che è possibile rendere conto, e discriminare, le diverse tipologie di SMS attraverso due nozioni base, quella di *risorse concettuali* (*conceptual resources*) e di *strumenti intellettuali* (*intellectual tools*). In una SMS, le risorse concettuali sono dei particolari concetti matematici che permettono di riconcettualizzare uno stato di cose empirico in uno stato di cose matematico. Questa riconcettualizzazione è adeguata (ai fini della spiegazione matematica di un fenomeno empirico) se su di essa è possibile applicare degli strumenti intellettuali, ovvero particolari abilità al ragionamento che gli scienziati hanno acquisito e che possono variare da contesto a contesto [Molinini 2011, p. 352]. Molinini analizza e ricostruisce vari esempi provenienti dalla letteratura in termini della sua proposta, considerando il ragionamento analogico (*analogical reasoning*) e il ragionamento visuale (*visual reasoning*) come esempi paradigmatici di strumenti intellettuali. Michèle Friend ha recentemente utilizzato quest'approccio per rendere conto di alcune SMS offerte in relatività (ristretta e generale) attraverso un'assiomatizzazione della teoria di Einstein in logica del primo ordine, e più precisamente in teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel [Friend 2012].

2.4 Approcci alla spiegazione matematica in matematica

Come nel caso della SMS, anche qui potremmo descrivere diversi approcci al problema. Abbiamo già visto come in Bolzano sia presente una teoria di spiegazione matematica in matematica. In particolare, Bolzano ritiene che dedurre logicamente una proposizione matematica partendo da un sistema di proposizioni che costituiscono le premesse è certamente sufficiente per stabilire la certezza del risultato, ma potrebbe non essere sufficiente per offrire la ragione del perché quel risultato sia tale. Ecco perché, nel quarto volume delle *Wissenschaflslehre* [Bolzano 1837], egli elabora una dottrina del perché una dimostrazione analitica sia da considerarsi superiore a una dimostrazione geometrica in casi come quello del teorema degli zeri di un polinomio. E questa dottrina, come abbiamo anticipato, si basa su una maniera di discriminare tra dimostrazioni che non spiegano e dimostrazioni che invece mostrano il perché un fatto matematico sia da considerarsi vero introdotta molto prima di Bolzano, da Aristotele stesso nei suoi *Analitici Posteriori*. Anche Descartes nei suoi lavori afferma che esista una differenza fra dimostrazioni matematiche esplicative e non [Descartes 1996, II, p. 198]. E la distinzione che egli propone è diversa da quella che possiamo rintracciare in Aristotele. In particolare, Descartes ritiene che le dimostrazioni che hanno potere esplicativo siano quelle che sono basate sul metodo analitico e che mostrano come il risultato possa essere scoperto sulla base di una qualche ipotesi [*Ibid.*, VI, p. 76 e VII, p. 155], mentre le dimostrazioni non-esplicative sono quelle che sono basate sul metodo assiomatico e che non mostrano come il risultato possa essere scoperto, sempre sulla base di una qualche ipotesi [*Ibid.*, VII, p. 156].[13]

Naturalmente Bolzano e Descartes non sono stati gli unici a offrire una caratterizzazione della nozione di spiegazione matematica in matematica nella storia della filosofia. Anche recentemente sono state avanzate varie proposte, principalmente all'interno della corrente analitica, per catturare la nozione di SMM o perlomeno fornire un'analisi dettagliata di casi concreti in cui la matematica sembra avere potere esplicativo. Il dibattito è aperto su questi temi e riportiamo qui i lavori principali: Steiner [1978a], Kitcher [1984], Sandborg [1998], Mancosu [2000, 2001], Tappenden [2005], Leng [2005], Hafner e Mancosu [2005, 2008], Baker [2009b], Cellucci [2008, 2011], Lange

[13] Per una discussione della distinzione fatta da Descartes tra prove esplicative e non, si veda Cellucci [2011].

[2010], Molinini [2013]. Va notato che alcuni di questi lavori sono dedicati allo studio della spiegazione matematica in termini di un modello classico di spiegazione scientifica. Ad esempio, David Sandborg [1998] ha testato l'applicabilitá del modello pragmatico di spiegazione scientifica proposto da Bas van Fraassen su un caso di spiegazione matematica in matematica (caso riconosciuto come tale dal famoso matematico George Polya). Johannes Hafner e Paolo Mancosu hanno valutato l'applicabilitá e la possibile estensione del modello di unificazione avanzato da Philip Kitcher su un caso di SMM proposto nei lavori del matematico Gregory W. Brumfiel [Hafner e Mancosu 2008].[14] Molinini [2013] analizza un'estensione del modello nomologico-deduttivo, proposto da Carl Hempel e Paul Hoppenheim, al caso di spiegazioni matematiche in scienza e in matematica. Fra i lavori citati in questa sottosezione, quello proposto da Mark Steiner nel suo Steiner [1978a] è quello che ha ricevuto più attenzione e che è tuttora considerato come punto di riferimento dai filosofi interessati alla nozione di SMM. Qui di seguito illustreremo brevemente le linee generali del lavoro di Mark Steiner sulla spiegazione matematica in matematica, lasciando da parte le varie critiche a cui questo modello è stato sottoposto [cfr. Resnik e Kushner 1987; Hafner e Mancosu 2005; Molinini 2012; Baker 2012].

Mark Steiner si concentra sulle dimostrazioni matematiche e offre una caratterizzazione di SMM in termini di due nozioni base: *proprietà caratterizzante* e *generalizzabilitá* attraverso una variazione della proprietà caratterizzante. Steiner definisce una proprietà caratterizzante come una "proprietà unica a una entità o struttura [matematica] all'interno di una famiglia o dominio di tali entità o strutture [matematiche]" [Steiner

[14] Il modello di unificazione proposto da Kitcher è infatti, secondo quanto afferma l'autore stesso, un modello per la spiegazione in scienza e in matematica [Kitcher 1989, pp. 423, 437].

1978a, p. 143, traduzione dell'autore]. Questa definizione potrà sembrare piuttosto oscura, tuttavia per semplificare possiamo intendere la proprietà caratterizzante come una particolare proprietà (da individuare caso per caso) che un oggetto matematico possiede. Quest'oggetto matematico farà parte di una famiglia di oggetti matematici, come le due matrici $M_1(2 \times 2)$ e $M_2(7 \times 7)$ appartengono alla famiglia delle matrici quadrate $M(n \times n)$. La proprietà caratterizzante dell'oggetto matrice M potrebbe essere quindi, per esempio, la proprietà che questa matrice ha di essere di ordine dispari, come la matrice $M_2(7 \times 7)$ o la matrice $M_3(1 \times 1)$. Sempre secondo Steiner, l'oggetto che possiede questa proprietà caratterizzante appare nella proposizione che identifica il teorema in questione, e il potere esplicativo della relativa dimostrazione matematica dipende da questa particolare proprietà. In altre parole, per una qualsiasi dimostrazione esplicativa è possibile rintracciare un oggetto matematico che possiede questa particolare proprietà. In che modo? Steiner suggerisce che vi è una dipendenza fra il risultato stabilito dal teorema e la proprietà caratterizzante di un oggetto menzionato nel teorema in questione. Questo ci introduce alla seconda nozione proposta da Steiner per catturare la spiegazione matematica in matematica, ovvero la nozione di generalizzabilitá (attraverso una variazione della proprietà caratterizzante). La sua idea è che se deformiamo la dimostrazione attraverso una variazione della proprietà caratterizzante di un oggetto matematico, ad esempio scegliendo matrici di ordine pari nel nostro esempio delle matrici quadrate, otterremo in cambio una variazione del teorema e più in generale un nuovo teorema (o un insieme di nuovi teoremi). Inoltre, ogni nuovo teorema così ottenuto sarà provato e spiegato dalla relativa prova, i.e. la prova ottenuta deformando la dimostrazione di partenza attraverso una variazione della proprietà caratterizzante di un certo oggetto matematico.

Possiamo quindi riassumere l'idea base di Steiner in due criteri. Una dimostrazione matematica è esplicativa se:

i. Dipende da una proprietà caratterizzante menzionata nel teorema
ii. È possibile deformare la prova sostituendo la proprietà caratterizzante e ottenendo uno o più teoremi.

Partendo da questa nozione di SMM, Steiner cerca degli esempi di dimostrazioni che debbano considerarsi come esplicative secondo la sua idea di SMM. Nel fare ciò egli adotta, come abbiamo detto sopra, un approccio *philosophy-first* alla spiegazione matematica. Gli esempi discussi da Steiner, benché interessanti per comprendere meglio la sua nozione di SMM, richiederebbero una presentazione tecnica che in questo tema non offriamo per ovvie ragioni di spazio. Ci limitiamo a rimandare il lettore al suo articolo Steiner [1978a], dove Steiner offre al lettore varie dimostrazioni esplicative (secondo i due criteri sopra). Tra queste, una prova della formula per la somma dei primi *n* numeri interi e una prova dell'irrazionalitá della radice quadrata di 2 utilizzando il teorema fondamentale dell'aritmetica. In un altro articolo, dedicato alla spiegazione matematica in fisica, Steiner considera come ulteriore esempio di SMM una prova offerta in algebra lineare di un particolare teorema detto *teorema di Eulero* [Steiner 1978b]. Anche in questo caso, Steiner cerca di mostrare come la prova sia da considerarsi esplicativa perché essa soddisfa i due criteri (i) e (ii).

3. Ramificazioni: applicabilità, idealizzazione, indispensabilità

La studio della nozione di spiegazione matematica ha ramificazione in svariate aeree della filosofia della scienza e della matematica, e ha un ruolo chiave in molti dibattiti che si sviluppano in queste aeree. Naturalmente lo scopo di questa sezione non è quello di illustrare nel dettaglio questi dibattiti e il ruolo che la nozione di spiegazione matematica assume in essi, cosa che meriterebbe uno o più articoli a parte. Piuttosto, in questa sede suggeriamo al lettore le coordinate essenziali per avere accesso a queste discussioni. In particolare ci concentriamo su tre temi specifici: applicabilità della matematica, idealizzazione matematica, indispensabilità.

Com'è naturale pensare, lo studio delle SMS è intimamente connesso alla problematica più generale che riguarda l'applicabilità della matematica al mondo. In effetti, il fatto che esista una maniera di spiegare matematicamente alcuni fenomeni empirici sembra sia possibile solo perché la matematica può essere applicata con successo a questi fenomeni. Il Nobel per la fisica Eugene Paul Wigner ha parlato di "efficacia irragionevole della matematica nelle scienze naturali" [Wigner 1960, traduzione dell'autore] per intendere il fatto che la matematica si applica con successo ai fenomeni che interessano le scienze naturali, ma che tuttavia la ragione di questa sua applicabilità rimane oscura. Alcuni filosofi hanno proposto delle caratterizzazioni di SMS partendo dal problema dell'applicabilità. In particolare, tra gli approcci al problema dell'applicabilità in cui viene discussa anche la nozione di spiegazione matematica, vanno segnalati i seguenti: la concezione strutturalista *mapping account* proposta da Christopher Pincock [Pincock 2004, 2007a] e la *concezione inferenziale dell'applicazione della matematica* proposta da Otávio Bueno e Mark Colyvan [Bueno e Colyvan 2011].[15] I lavori di Pincock, Bueno e Colyvan qui indicati sono un ottimo punto di partenza per avere un'idea di come il problema dell'applicabilità sia discusso in relazione a quello della spiegazione matematica.

Un problema intimamente legato al problema dell'applicabilità, e in cui la nozione di spiegazione matematica è spesso discussa, è quello che riguarda l'utilizzo dei modelli matematici e delle idealizzazioni in scienza. Solitamente in scienza rappresentiamo un sistema attuale introducendo delle falsificazioni nella sua struttura concreta. In pratica, consideriamo un sistema e nel rappresentarlo alteriamo alcune delle sue caratteristiche fisiche. Questo per rendere il problema matematicamente trattabile, o semplicemente perché ipotizziamo che la distorsione di certe caratteristiche concrete del sistema non avrà conseguenze notevoli sul nostro risultato finale. Per esempio, nello studio del moto della Terra attorno al Sole, consideriamo che il nostro pianeta abbia una forma perfettamente sferica, oppure che la sua massa sia concentrata in un unico punto all'interno del pianeta. Naturalmente, la Terra non ha una forma sferica e la sua massa non è concentrata in un solo punto. In pratica, niente nel mondo fisico corrisponde a un'idealizzazione. Tuttavia, le rappresentazioni matematiche (false del mondo, se prese alla lettera) che otteniamo a partire da queste idealizzazioni sembrano avere un ruolo nella spiegazione dei fenomeni empirici [Cartwright 1983; Morgan e Morrison 1999; Pincock 2007b]. Il problema è dunque quello di rendere conto del perché queste rappresentazioni matematiche, che sono false del mondo, abbiano un qualche potere esplicativo. Questo richiede sicuramente un qualche modello di applicabilità e una qualche nozione di spiegazione matematica.

[15] Sulla concezione inferenziale si veda anche il più recente Bueno e French [2012].

La nozione di spiegazione matematica gioca un ruolo cruciale anche nel dibattito ontologico fra realisti e anti-realisti in filosofia della matematica (platonisti contro nominalisti). In particolare, essa è utilizzata da alcuni filosofi della matematica che difendono una posizione platonista, fra cui Alan Baker e Mark Colyvan, per dimostrare l'esistenza di alcune entità matematiche attraverso quegli argomenti noti come argomenti d'indispensabilità. Questi filosofi si appellano al fatto che la quantificazione sulle (o la referenza alle) entità matematiche sia indispensabile per le nostre teorie scientifiche e che la matematica ci fornisca, a volte, la miglior spiegazione di un fenomeno empirico. Essi dunque accettano l'esistenza di SMS. In questi casi, ovvero nei casi in cui siamo di fronte a una SMS, essi considerano che la matematica debba considerarsi esplicativamente indispensabile per le teorie scientifiche che trattano del fenomeno empirico in questione, e che questo sia sufficiente per concludere che esistano gli (o alcuni) oggetti matematici utilizzati nelle relative spiegazioni. Nello stabilire questa conclusione, tali filosofi stanno utilizzando un principio detto *inferenza alla miglior spiegazione* (IBE, i.e. *Inference to the Best Explanation*). Attualmente vi sono varie versioni di quest'argomento in filosofia della matematica [cfr. Panza e Sereni 2010, cap 6]. La versione *aumentata* (*enhanced* indispensability argument) è quella più discussa in relazione alla spiegazione matematica in scienza ed è dovuta a Alan Baker [Baker 2009a]. Anche qui, come nel caso della spiegazione matematica *tout court*, la letteratura è cresciuta esponenzialmente negli ultimi anni e ci sono molti lavori in uscita.[16] Per una presentazione degli argomenti d'indispensabilità in filosofia della

[16] Fra questi menzioniamo qui il volume "Indispensability and Explanation", di prossima uscita come numero speciale della rivista *Synthese* [Molinini *et al.* 2013]. Questo volume, edito da Molinini, Pataut e Sereni, raccoglie i contributi del workshop *Indispensability and Explanation* tenutosi recentemente a Parigi (IHPST, Novembre 2012).

matematica, le cui radici affondano nell'argomento d'indispensabilità per il realismo matematico attribuito a Willard Van Orman Quine e Hilary Putnam, rimandiamo alla voce "Argomenti di Indispensabilità in Filosofia della Matematica" di Andrea Sereni, in *APhEx* [Sereni 2010], e a Colyvan [2011]. Questi studi forniranno al lettore anche una panoramica del dibattito in corso.

In una sezione precedente abbiamo visto come Bolzano consideri che la spiegazione matematica sia legata alla possibilità di provare un risultato matematico attraverso le stesse risorse concettuali che sono utilizzate per formulare il risultato (ad esempio attraverso i concetti offerti dall'analisi matematica). In questo modo, Bolzano suggerisce che vi è un legame tra la cosiddetta *purezza della prova* (*purity of proof*) e la spiegazione matematica.[17] La connessione fra purezza e spiegazione matematica in matematica, insieme con un esempio di SMM che sembra confermare l'intuizione di Bolzano, è discussa in Molinini [2012]. Vi sono inoltre alcuni studi che sembrano indicare che vi sia un qualche legame tra la spiegazione matematica in matematica e l'utilizzo di un diagramma matematico in una dimostrazione [Giaquinto 2008; Cellucci 2011]. Altro problema aperto, e non ancora affrontato nella letteratura, consiste nello stabilire se il potere esplicativo delle dimostrazioni matematiche sia una proprietà che viene posseduta o meno, o che ammette dei gradi. Gli studi compiuti finora sembrano indicare che una dimostrazione matematica o ha potere esplicativo o non lo ha, ma si potrebbe pensare che vi siano dimostrazioni che spiegano *in qualche modo* perché un teorema sia vero.[18] Lo stesso problema, ovvero la questione se il potere esplicativo

[17] Sulla nozione di *purity of proof* si vedano i lavori di Mic Detlefsen e Andrew Arana, in particolare Detlefsen e Arana [2011].

[18] Ad esempio, nel caso della dimostrazione geometrica del teorema degli zeri di un polinomio, citata quando abbiamo parlato di Bolzano, potremmo pensare che la dimostrazione ha un qualche potere

ammetta dei gradi, rimane aperto per il caso delle SMS. Infine, osserviamo che la nozione di spiegazione matematica è stata discussa in connessione con quella di comprensione scientifica [Lipton 2009; De Regt 2009]. In effetti, non è chiaro se le nozioni di spiegazione scientifica e comprensione scientifica debbano essere considerate come distinte, se siano correlate in qualche modo o se invece siano da considerarsi come equivalenti. Nel libro VII della *Repubblica*, ad esempio, Platone afferma che il possedere una spiegazione di qualcosa è una condizione essenziale per comprendere quel qualcosa. Platone suggerisce dunque che le due nozioni siano da considerare come distinte, ma che esista una relazione fra di esse. Il problema di offrire una qualche nozione adeguata di comprensione scientifica e spiegazione scientifica (o matematica) è un ulteriore problema che rimane aperto in filosofia della scienza, e su cui ci sono vari lavori in corso.[19] Tuttavia, anche in questo caso, siamo molto lontani dall'avere delle posizioni filosofiche ben delineate (ad esempio, i termini spiegazione scientifica e comprensione scientifica sono a volte confusi o fusi in un'unica nozione nei vari dibattiti in corso, o utilizzati senza la necessaria chiarezza filosofica).

4. Conclusioni

Nonostante lo studio sistematico della spiegazione matematica sia ancora in una fase "adolescenziale" [Tappenden 2008], abbiamo visto come il problema di catturare questa nozione abbia radici antiche, che possono essere riconosciute in Aristotele, e come esso abbia oggi ramificazioni in svariate aree della filosofia della scienza e della matematica.

esplicativo poiché noi possiamo effettivamente vedere che la linea attraversa l'asse delle ascisse e che non potrebbe essere altrimenti.

[19] Ad esempio Carlo Cellucci offre, sulla base della sua distinzione tra approccio *statico* e *dinamico* alle dimostrazioni esplicative, una possibile maniera di distinguere tra SMM che offrono comprensione del problema matematico e SMM che non offrono tale comprensione [Cellucci 2011].

In quest'articolo non abbiamo proposto una prospettiva storica della questione, ma ci siamo focalizzati su casi concreti e sugli sforzi compiuti da alcuni filosofi per catturare la nozione di spiegazione matematica. Tuttavia, abbiamo cercato di offrire al lettore alcuni spunti storici, e questo con lo scopo di evidenziare l'importanza che lo studio della spiegazione matematica ha assunto nella storia della filosofia e, perché no, con la volontà di seguire il motto di Imre Lakatos secondo cui la filosofia della scienza, senza storia della scienza, potrebbe avere dei seri problemi alla vista. Inoltre sottolineiamo qui come la maggior parte delle analisi filosofiche contemporanee che riguardano la nozione di spiegazione matematica si basino per la maggior parte sull'osservazione della pratica scientifica. In questo senso, è facile vedere come una prospettiva storica possa risultare utile all'analisi filosofica [Mancosu 1999, 2000].

Naturalmente quest'articolo non ha la pretesa di essere completamente esaustivo del dibattito in corso, né potrebbe esserlo per ragioni di spazio. Molti problemi relativi all'analisi della spiegazione matematica non sono stati menzionati, mentre per altre questioni abbiamo preferito offrire solo dei riferimenti essenziali. Ad esempio il lettore si sarà chiesto se esiste una connessione fra SMS e SMM. In effetti, questo è un problema aperto e alcuni filosofi ritengono che tale connessione esista. Mark Steiner considera che una SMS sia dipendente da una SMM (nel senso del suo modello di SMM). Più precisamente, la sua idea è che una spiegazione matematica in scienza "erediti" il potere esplicativo da una spiegazione matematica di un teorema che partecipa alla spiegazione del fatto empirico in questione [Steiner 1978b]. In un articolo apparso di recente, Alan Baker ha messo in dubbio questo tipo di legame tra SMS e SMM [Baker 2012]. Un'altra questione che non abbiamo affrontato riguarda la possibilità di avere spiegazioni matematiche in scienza che non riguardano fenomeni, come abbiamo visto finora, ma intere teorie fisiche. Ovvero potremmo pensare che la matematica possa rispondere a domande che ci facciamo su un'intera teoria fisica, e in particolare sui suoi assiomi, teoremi, e le sue predizioni. L'idea che esistano spiegazioni matematiche di teorie fisiche è stata avanzata solo di recente, da Michèle Friend e Daniele Molinini, ma questa linea di ricerca è ancora in una fase iniziale [Friend e Molinini 2012]. Questi e altri problemi non sono stati considerati in questa sede. Tuttavia, il lettore potrà esplorare tali problematiche partendo dai lavori citati nelle sezioni precedenti.

La matematica gioca un ruolo chiave nella nostra immagine scientifica del mondo. Se la sua funzione si estende a quella di *spiegare* fenomeni empirici e fatti matematici, come sembrano suggerire molti filosofi e scienziati, allora è compito della filosofia della scienza di rendere conto di questa funzione offrendo una nozione adeguata. Ma, di nuovo, nonostante questa ricerca abbia interessato molti filosofi fin dall'antichità, essa sembra essere ancora in pieno svolgimento e molte piste filosofiche non sono ancora state percorse.

BIBLIOGRAFIA

Baker A. (2005), "Are There Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?", *Mind,* 114, pp. 223-238.

Baker A. (2009a), "Mathematical Explanation in Science", *British Journal for the Philosophy of Science,* 60, pp. 611-633.

Baker A. (2009b), "Mathematical Induction and Explanation", *Analysis,* 70, pp. 681-690.

Baker A. (2012), "Science-Driven Mathematical Explanation", *Mind*, 121, 482, pp. 243-267.

Batterman R. (2002), *The Devil in the Details*, Oxford University Press, Oxford.

Batterman R. (2010), "On the Explanatory Role of Mathematics in Empirical Science", *British Journal for the Philosophy of Science*, 61, 1, pp. 1-25.

Belot G. (2005), "Whose Devil? Which Details?", *Philosophy of Science*, 72, 1, pp. 128-153.

Bolzano B. (1817), *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung* liege, Gottlieb Haase, Praga.

Bolzano B. (1837), *Wissenschaftslehre*, ristampato in Scientia Verlag, Aalen, 1981.

Boyer C. B. (1959), *The Rainbow: From Myth to Mathematics*, Yoseloff, New York.

Bueno O., Colyvan M. (2011), "An Inferential Conception of the Application of Mathematics", *Noûs* , 45, 2, pp. 345-374.

Bueno O., French S. (2012), "Can Mathematics Explain Physical Phenomena?", *British Journal for the Philosophy of Science*, 63, 1, pp. 85-113.

Cartwright N. (1983), *How the Laws of Physics Lie*, Clarendon Press, Oxford.

Cellucci C. (2008), "The Nature of Mathematical Explanation", *Studies in History and Philosophy of Science*, 39, pp. 202-210.

Cellucci C. (2011), "Explanatory and Non-Explanatory Demonstrations", in Bour P. E., Schroeder-Heister P. (a cura di), *Proceedings of the 14th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science Nancy, July 19-26, 2011*, in corso di pubb.

Clifton R. (1998), "Structural Explanation in Quantum Theory", E-print http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00000091/00/explanation-in-QT.pdf.

Colyvan M. (2011), "Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics", in Zalta E. N. (a cura di), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Spring 2011 Edition, http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/.

Daly C., Langford S. (2009), "Mathematical Explanation and Indispensability Arguments", *The Philosophical Quarterly* , 59, 237, pp. 641-658.

Darwin C. (1998), *The Origin of Species*, Random House, New York.

De Regt H. W. (2009), "The Epistemic Value of Understanding", *Philosophy of Science*, 76, pp. 585-597.

Descartes R. (1996), *Oeuvres*, Vrin, Parigi.

Detlefsen M., Arana A. (2011), "Purity of Methods", *Philosophers' Imprint*, 11, 2, pp. 1-20.

Díez J. A. (2002), "Explicación, Unificación y Subsunción", in González W. (a cura di), *Pluralidad de la Explicación Científica*, Ariel, Barcellona, pp. 73-93.

Díez J. A., Moulines U. (2008), *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia*, terza edizione, Ariel, Barcellona.

Dorato M., Felline L. (2011), "Scientific Explanation and Scientific Structuralism", in Bokulich A., Bokulich P. (a cura di), *Boston Studies in Philosophy of Science*, Vol 281, *Scientific Structuralism*, Springer, Dordrecht, pp. 161-176.

Felline L. (2011), "Scientific Explanation between Principle and Constructive Theories", *Philosophy of Science*, 78, 5, pp. 989-1000.

Friend M. (2012), "The Epistemological Significance of Giving Axioms for the Relativity Theories in the Language of First-Order Zermelo-Fraenkel Set Theory", *Proceedings of the First International Conference on Logic and Relativity: honoring István Németi's 70th birthday*, in corso di pubb.

Friend M., Molinini D. (2012), "When Mathematics Explains a Scientific Theory", manoscritto.

Giaquinto M. (2008), "Visualizing in Mathematics", in Mancosu P. (a cura di), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford, pp. 22-42.

Gingras Y. (2001), "What did Mathematics do to Physics?", *History of Science*, 39, pp. 383-416.

Hafner J., Mancosu P. (2005), "The Varieties of Mathematical Explanation", in Mancosu P., Jørgensen K. F., Pedersen S. (a cura di), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Springer, Dordrecht, pp. 215-250.

Hafner J., Mancosu P. (2008), "Beyond Unification", in Mancosu P. (a cura di), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford, pp. 151-179.

Hales T. C. (2001), “The Honeycomb Conjecture”, *Discrete Computational Geometry*, 25, pp. 1-22.

Hempel C., Oppenheim P. (1948), “Studies in the Logic of Explanation”, *Philosophy of Science Studies*, 15, pp. 135-175.

Hughes R. I. G. (1989a), “Bell’s Theorem, Ideology, and Structural Explanation”, in Cushing J., McMullin J. (a cura di), *Philosophical Consequences of Quantum Theory*, Notre Dame Press, Notre Dame, pp. 195-207.

Hughes R. I. G. (1989b), *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*, Harvard University Press, Cambridge.

Kitcher P. (1975), “Bolzano's Ideal of Algebraic Analysis”, *Studies in History and Philosophy of Science*, 6, pp. 229-269.

Kitcher P. (1984), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford.

Kitcher P. (1989), “Explanatory Unification and the Casual Structure of the World”, in Kitcher P., Salmon W. (a cura di), *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Vol 13, *Scientific Explanation*, University of Minnesota Press, Minneapolis, pp. 410-505.

Lange M. (2010), “Why Proofs by Mathematical Induction are Generally not Explanatory”, *Analysis*, 69, pp. 203-211.

Laudisa F. (2012), “Causalità”, in *APhEx Portale Italiano di Filosofia Analitica*, n.5, 2012.

Leng M. (2005), “Mathematical Explanation”, in Cellucci C., Gillies D. (a cura di), *Mathematical Reasoning, Heuristics and the Development of Mathematics*, King’s College Publications, Londra, pp. 167-189.

Lipton P. (2009), “Understanding Without Explanation”, in De Regt H. W., Leonelli S., Eigner K. (a cura di), *Scientific Understanding: Philosophical Perspectives*, University of Pittsburgh Press, Pittsburgh, pp. 43-63.

Lyon A., Colyvan M. (2008), “The Explanatory Power of Phase Spaces”, *Philosophia Mathematica*, 16, pp. 227-243.

Maddy P. (1990), “Indispensability and Practice”, *Journal of Philosophy*, 89, pp. 275-289.

Mancosu P. (1999), "Bolzano and Cournot on Mathematical Explanation", *Revue d'Histoire des Sciences*, 52, pp. 429-455.

Mancosu P. (2000), "On Mathematical Explanation", in Grosholz E., Breger H. (a cura di), *The Growth of Mathematical Knowledge*, Kluwer, Dordrecht, pp. 103-109.

Mancosu P. (2001), "Mathematical Explanation: Problems and Prospects", *Topoi*, 20, pp. 97-117.

Mancosu P. (a cura di) (2008a), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford.

Mancosu P. (2008b), "Mathematical Explanation: Why It Matters", in Mancosu P. (a cura di), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford, pp. 134-149.

Mancosu P. (2011), "Explanation in Mathematics", in Zalta E. N. (a cura di), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Spring 2011 Edition, http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/.

Melia J. (2000), "Weaseling Away the Indispensability Argument", *Mind*, 109, 435, pp. 455-479.

Molinini D. (2011), *Towards a Pluralist Approach to Mathematical Explanation of Physical Phenomena*, tesi dottorale, Università Paris 7 Denis Diderot, Parigi, testo integrale disponibile on-line: http://www.danielemolinini.com/wp-content/uploads/2013/02/main_my_phd_thesis.pdf

Molinini D. (2012), "Learning from Euler. From Mathematical Practice to Mathematical Explanation", *Philosophia Scientiæ* , 16, 1, pp. 105-127.

Molinini D. (2013), "Deductive Nomological Model and Mathematics: Making Dissatisfaction more Satisfactory", *THEORIA. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science*, in corso di pubb.

Molinini D., Pataut F., Sereni A. (a cura di) (2013), *Indispensability and Explanation*, numero speciale di *Synthese*, in corso di pubblicazione.

Molinini D. (2014), *Che cos'è una Spiegazione Matematica*, Carocci, Roma.

Morgan M. S., Morrison M. (1999), *Models as Mediators. Perspectives on Natural and Social Science*, Cambridge University Press, Cambridge.

Panza M., Sereni A. (2010), *Il Problema di Platone*, Carocci, Roma (ed. inglese aggiornata, *Plato's Problem. An Introduction to Mathematical Platonism*, Palgrave Macmillan, Basingstoke UK, 2013).

Pincock C. (2004), "A New Perspective on the Problem of Applying Mathematics", *Philosophia Mathematica*, 12, 2, pp. 135-161.

Pincock C. (2007a), "A Role for Mathematics in the Physical Sciences", *Noûs*, 41, 2, pp. 253-275.

Pincock C. (2007b), "Mathematical Idealizations", *Philosophy of Science*, 74, pp. 957-967.

Pincock C., Mancosu P. (2012), "Mathematical Explanation", in Pritchard D. (a cura di), *Oxford Bibliographies in Philosophy*, Oxford University Press, New York.

Resnik M., Kushner D. (1987), "Explanation, Independence, and Realism in Mathematics", *British Journal for the Philosophy of Science*, 38, pp. 141-158.

Saatsi J. (2011), "The Enhanced Indispensability Argument: Representational versus Explanatory Role of Mathematics in Science", *British Journal for the Philosophy of Science* , 62, 1, pp. 143-154.

Sandborg D. (1998), "Mathematical Explanation and the Theory of Why-questions", *British Journal for the Philosophy of Science*, 49, pp. 603-624.

Sereni A. (2010), "Argomenti d'Indispensabilità in Filosofia della Matematica", in *APhEx Portale Italiano di Filosofia Analitica*, n.1, 2010.

Steiner M. (1978a), "Mathematical Explanation", *Philosophical Studies*, 34, pp. 135-151.

Steiner M. (1978b), "Mathematics, Explanation and Scientific Knowledge", *Noûs*, 12, pp. 17-28.

Russ S. B. (1980), "A Translation of Bolzano's Paper on the Intermediate Value Theorem", *Historia Mathematica*, 7, 2, pp. 156-185.

Tappenden J. (2005), "Proof Style and Understanding in Mathematics I: Visualization, Unification and Axiom Choice", in Mancosu P., Jørgensen K., Pedersen S. (a cura di), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Springer, Berlin, pp. 147-214.

Tappenden J. (2008), "Mathematical Concepts and Definitions", in Mancosu P. (a cura di), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford, pp. 256-275.

Tymoczko T. (a cura di) (1998), *New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology*, Princeton University Press, Cambridge.

Wigner E. P. (1960), "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13, 1, pp. 1-14.