Artificial intelligence and cognitive psychology: How to solve mathematical problems



*Published Version:*
Artificial intelligence and cognitive psychology: How to solve mathematical problems / Gambetti E.; Buscaroli R.; Chesani F.; Giusberti F.; Loreti D.; Mello P.. - In: SISTEMI INTELLIGENTI. - ISSN 1120-9550. - ELETTRONICO. - 32:2(2020), pp. 287-316. [10.1422/96329]

*Availability:*
This version is available at: https://hdl.handle.net/11585/772833 since: 2020-09-28

*Published:*
DOI: http://doi.org/10.1422/96329



(Article begins on next page)

# Intelligenza artificiale e psicologia cognitiva a confronto nella soluzione di giochi matematici[1]

Elisa Gambetti[a], Riccardo Buscaroli, Federico Chesani[b], Fiorella Giusberti[a], Daniela Loreti[b], Paola Mello[b]
[a] *Dipartimento di Psicologia, Università di Bologna*
[b] *Dipartimento di Informatica – Scienza e Ingegneria – DISI, Università di Bologna*

## 1. Introduzione

L'era dei "big data", caratterizzata dall'introduzione di tecniche sempre più efficienti per l'analisi di grandi moli di dati, ha determinato negli ultimi anni un progresso notevole nel campo dell'Intelligenza Artificiale (IA), permettendo tra l'altro di costruire macchine in grado di "sconfiggere" l'uomo in molti giochi di strategia, come ad esempio scacchi, dama, Go, o poker.
Il panorama della ricerca in IA è stato dominato fino agli anni '90 dal cosiddetto approccio "classico" o "simbolico". Sotto questa tipologia ricadono tutte le tecniche basate su una rappresentazione del problema di alto livello, facilmente interpretabile per l'essere umano. Dopo tale periodo, nuovi approcci, maggiormente concentrati sull'estrazione di conoscenza da grandi moli di dati (solitamente indicati col termine "big data"), hanno iniziato a farsi strada fino a diventare parte predominante della moderna IA. Le tecniche di Deep Learning (Goodfellow, Bengio, & Courville, 2016) in particolare hanno portato un progresso inatteso in determinati campi dell'IA. Esse costituiscono una rielaborazione dei concetti provenienti dal mondo delle reti neurali degli anni '60. Al giorno d'oggi in alcuni domini, le tecniche dell'IA assicurano prestazioni paragonabili (ed in molti casi persino migliori) all'intelligenza umana. Ne sono un esempio le tecniche di riconoscimento di immagini, analisi video, pianificazione, diagnosi, analisi del linguaggio naturale, ecc... I recenti progressi dell'IA, in particolare quelli ottenuti in ambito del Deep Learning, si accompagnano tuttavia ad altrettanto significativi limiti, primo fra tutti la frequente impossibilità di fornire una spiegazione per i risultati ottenuti. Grazie al suo approccio simbolico, l'IA classica non risente di tale problema, ma presenta prestazioni decisamente inferiori, specie nell'ambito dell'apprendimento automatico.
Nonostante gli innegabili passi avanti compiuti in generale dall'IA, la sfida di progettare un computer capace di risolvere autonomamente un semplice gioco matematico, partendo dalla sua descrizione in linguaggio naturale, rimane tuttora aperta. Per esempio, una macchina è stata recentemente in grado di battere il campione mondiale di Go (Silver et al., 2016), ma non esiste alcun computer, anche molto potente in termini di risorse di calcolo e memoria, capace di comprendere e risolvere un semplice indovinello come "Lucia, Marco e Francesco sono amici e la somma delle loro età è pari a 28. Tra quanti anni sarà pari a 37?". Tale indovinello potrebbe invece essere facilmente risolto da bambini di 9 o 10 anni. Infatti una volta compresa la domanda posta dal problema e i dati a disposizione, la risoluzione di tale indovinello non richiede profonde conoscenze matematiche o di cultura generale (Jonassen, 2000).

[1] Questo lavoro è stato parzialmente supportato dal progetto ASIA-GiM (Agenti Software Intelligenti e Autonomi per la risoluzione di Giochi Matematici), finanziato dall'Università di Bologna nell'ambito dell'iniziativa AlmaIDEA.

In altre parole, l'IA non "soffre" i meri aspetti di calcolo (infatti qualora aumentassimo il numero di amici nell'indovinello, la difficoltà per gli algoritmi di IA aumenterebbe in maniera non rilevante), quanto piuttosto la "comprensione" del problema. Per l'IA, "comprendere" un problema significa riuscire a trasporre il testo (o il diagramma) in una qualche rappresentazione formale utile alla risoluzione. Tale forma viene detta "modello del problema". All'opposto, i bambini non trovano importanti difficoltà nella comprensione dei dati del problema e del procedimento per risolverlo (in questo caso il termine comprensione assume altro significato). Aspetti quali il numero di variabili (i.e., il numero di amici nel problema presentato) potrebbero invece comportare grosse difficoltà nella risoluzione (e.g., risolvere l'indovinello considerando tre amici piuttosto che trecento amici comporta difficoltà diverse per l'essere umano).
Per affrontare questa sfida, e cioè far sì che la macchina riesca a trasporre il testo di un problema nel suo modello formale, l'IA non dovrebbe utilizzare unicamente un approccio guidato da grandi moli di dati, ma avvalersi anche di una sorta di "ragionamento profondo (*deep reasoning*)", che includa la capacità di comprendere il senso del testo, estrapolare da esso i dati necessari, individuare un modello adatto per la soluzione e poi impostare e infine risolvere il problema matematico così derivato.
I giochi matematici possono essere quindi considerati una sfida per la moderna IA e una "palestra" interessante per superare la sua attuale frammentazione poiché richiedono un'integrazione di diverse abilità quali la comprensione del linguaggio naturale, l'estrazione di informazioni da figure o diagrammi e l'utilizzo di diversi metodi di problem-solving (Chesani, Mello, & Milano, 2017). Nell'affrontare tali problemi diventa quindi fondamentale considerare anche gli aspetti interdisciplinari dell'IA e trarre ispirazione dai modelli di psicologia cognitiva.
Come precedentemente sottolineato, i giochi matematici sono solitamente problemi scritti in linguaggio naturale, eventualmente corredati da un diagramma che ne esplica ulteriormente la richiesta, e per la cui soluzione non è necessaria alcuna nozione avanzata di matematica o geometria, né conoscenze approfondite di un particolare dominio. I prerequisiti per poter risolvere tali giochi si limitano a capacità di comprensione del testo (i.e., lettura ed estrazione della semantica), memoria di lavoro, memoria a breve e lungo termine, abilità di ragionamento induttivo e deduttivo (intelligenza fluida), e conoscenze quantitative riconducibili a nozioni matematiche di base (e.g., Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004). Tali competenze, comuni nei bambini al quarto e quinto anno della scuola primaria, pongono sfidanti interrogativi per gli esperti di IA.
Nel contesto informatico infatti, esistono numerosi approcci particolarmente efficienti, ciascuno specializzato nella soluzione di un particolare tipo di problema matematico (e.g., problemi di ottimizzazione, soddisfacimento vincoli, pianificazione, riconoscimento di forme, ecc…). Una volta individuata la categoria in cui ascrivere un determinato gioco matematico e formulato il problema in modo che sia "comprensibile" ad un computer, l'effettivo procedimento di risoluzione risulta banale per un calcolatore, in quanto risolvere un gioco matematico richiede solitamente una potenza computazionale ed un'occupazione di memoria irrisoria rispetto ad altri problemi reali.
L'eccessiva specializzazione dell'IA nell'individuazione di tecniche sorprendentemente efficienti, ma dedicate alla soluzione solo di una particolare classe di problemi, ha portato alla frammentazione in sotto-campi di ricerca trascurando il punto di vista della IA generale, in cui molte diverse "abilità cognitive" (come la comprensione di un testo o diagramma, e l'estrazione della conoscenza) devono essere sapientemente combinate in un'unica cornice.
Nell'ambizioso tentativo di contribuire a colmare il divario tra uomo e macchina nella risoluzione dei problemi, il nostro lavoro si propone di studiare come i giochi matematici possano

rappresentare un punto di partenza per investigare le possibili interrelazioni tra gli approcci di IA e quelli di psicologia cognitiva.
Poiché la soluzione degli giochi matematici chiama in causa numerose abilità che vengono declinate in modo differente nei due ambiti, il primo passo di questo lavoro consiste nell'individuare (e allineare ove possibile), utilizzando i giochi matematici come caso di studio, il punto di vista dell'IA con i modelli e i termini derivanti dalla psicologia, come ad esempio la teoria di Cattell-Horn-Carroll (CHC; Schneider & McGrew, 2012), una delle più note tassonomie delle capacità cognitive umane implicate nel comportamento intelligente. Nella seconda fase del lavoro, abbiamo individuato un insieme di giochi matematici omogenei relativamente alla rappresentazione del problema, la tecnica di soluzione e le abilità cognitive coinvolte, e li abbiamo somministrati a un gruppo di bambini di quarta elementare. Questo ci ha consentito di analizzare i processi cognitivi adottati dai bambini per la risoluzione di tali problemi, individuando le strategie di risoluzione "vincenti" attuate dagli esseri umani, e di confrontarle poi con le tecniche di IA. In questo senso, il lavoro qui presentato può essere considerato un piccolo passo verso l'individuazione di approcci di ricerca interdisciplinari e sufficientemente generali e olistici fra Intelligenza Artificiale e Scienze Cognitive.

## 2. Stato dell'arte

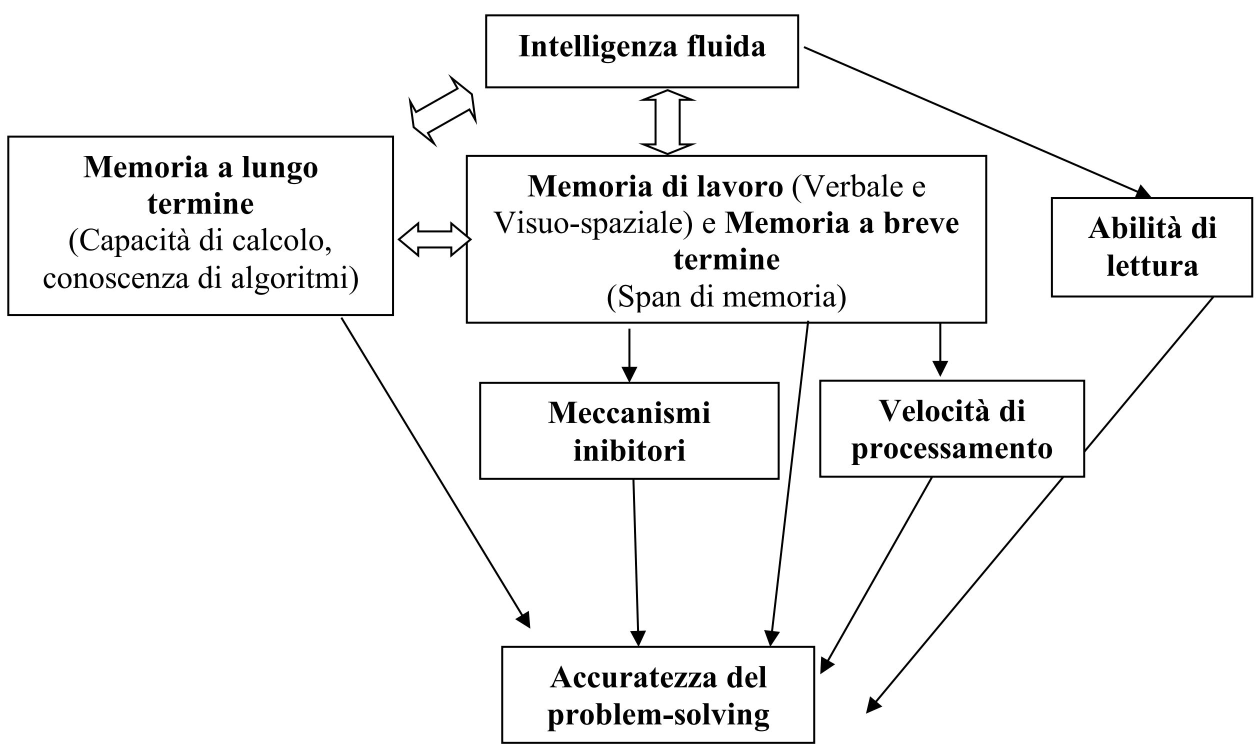
Dal punto di vista dell'IA, vi sono stati storicamente alcuni tentativi di fornire ad un elaboratore capacità autonome di risoluzione per problemi matematici, geometrici e logici (Bobrow, 1964). Più recentemente, il progetto denominato Japanese Todai Robot Project[2] (McGoogan, 2015; Strickland, 2013; Seo, Hajishirzi, Farhadi, Etzioni, & Malcolm, 2015), si concentra su tematiche di comprensione del testo espresso in linguaggio naturale al fine di creare entro il 2021 un sistema in grado di passare il test d'ingresso dell'Università di Tokyo.
Altri interessanti progetti nello stesso campo sono ARIS (Hosseini, Hajishirzi, Etzioni, & Kushman, 2014), Aristo (Clark, Harrison, & Balasubramanian, 2013), Euclid[3] e GEOS (Seo, Hajishirzi, Farhadi, Etzioni, & Malcolm, 2015). Mentre ARIS si concentra su semplici problemi matematici di tutti i giorni, Aristo mira a costruire, attraverso tecniche di interpretazione del linguaggio naturale, un vasto database di conoscenza espressa in una forma comprensibile a un elaboratore e a trasformare le domande dei test in *query* a cui fornire risposta utilizzando metodologie statistiche e inferenza. Euclid si concentra sullo sviluppo di un sistema per la soluzione di problemi di matematica e geometria per le scuole superiori. GEOS, infine, costituisce un esempio di sistema capace di risolvere test geometrici combinando capacità di comprensione del testo e interpretazione di diagrammi.
Nonostante le numerose somiglianze con questi progetti, l'approccio di questo lavoro non riguarda problemi che necessitano di una approfondita conoscenza in uno specifico dominio scientifico, ma si concentra piuttosto su quesiti che richiedono limitate conoscenze di matematica, logica e geometria. Nei problemi presi in esame sono presenti elementi tali da richiedere alla macchina delle capacità di "ragionamento di senso comune", ossia l'abilità di ragionamento spaziale, temporale, il concetto di causalità, ecc... che costituiscono esse stesse una sfida per l'IA.

---

[2] http://21robot.org/
[3] http://allenai.org/euclid.html

Dal punto di vista delle scienze cognitive, al fine di comprendere e risolvere problemi matematici in linguaggio naturale, gli individui devono comprendere le parole, le frasi e le proposizioni che costituiscono il testo del problema, tenere traccia delle informazioni acquisite e integrarle creando un'interpretazione coerente e sensata (e.g., Anderson, Reder, & Lebiere, 1996; Kail & Hall, 1999; Mayer & Hegarty, 1996; Swanson & Sachse-Lee, 2001). In questo processo la memoria di lavoro (e.g., Baddeley & Logie, 1999; Case, 1995) è indispensabile poiché permette l'immagazzinamento delle informazioni per il successivo utilizzo. A tal proposito alcuni studi (e.g., Le-Blanc & Weber-Russell, 1996) hanno evidenziato il ruolo fondamentale della memoria di lavoro (che spiega larga parte della varianza delle performance, dal 49% al 57%) nella risoluzione di problemi matematici in bambini di terza elementare. Swanson e Beebe-Frankenberger (2004) hanno inoltre dimostrato che la memoria di lavoro, nelle sue componenti verbale e visuo-spaziale, è un fattore indipendente nel predire l'accuratezza delle soluzioni di problemi matematici in bambini di 9-10 anni rispetto ad altre capacità cognitive fra cui l'intelligenza fluida, le abilità di lettura, le capacità matematiche, la conoscenza di algoritmi, la capacità di processamento fonologico e semantico, la memoria a breve termine e le capacità di inibizione (si veda Figura 1).

*Figura 1. Interazione fra le abilità cognitive implicate nella risoluzione di problemi matematici*




## 3. Una classificazione dei giochi matematici

Nell'ottica di individuare le relazioni tra approccio dell'IA e approccio cognitivo nella soluzione di giochi matematici, sono stati presi in esame 147 problemi appartenenti alla categoria CE dei Giochi d'Autunno dal 2008 al 2017. Tali problemi vengono somministrati ai bambini di quarta e

quinta elementare durante le competizioni che si svolgono ogni anno presso le scuole che aderiscono all'iniziativa. I testi e le relative soluzioni sono stati reperiti nell'archivio dell'Università Bocconi che organizza tali competizioni (Bocconi, 2019).
Un esempio di problemi reperibili nella banca dati dei Giochi d'Autunno è il seguente:

*"Il primo giorno del nuovo anno (il 1° gennaio 2018), Carla vuole fare i conti con la sua età. Pensa: "l'altro ieri avevo solo 8 anni, ma già entro la fine di quest'anno ne avrò 10!" In che giorno, mese, anno è nata Carla?"*

Tale gioco non richiede soltanto l'applicazione un formule matematiche, ma anche la capacità di comprendere il quesito e la conoscenza delle nozioni di calendario e età di un soggetto. Altri giochi sono di una tipologia completamente diversa, come il seguente.

*"Quanti triangoli sono presenti in* **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.***?"*

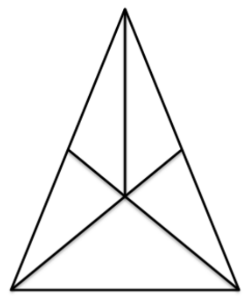


*Figura 2*

Al fine di determinare la soluzione non ci si deve limitare a leggere il testo, ma si deve considerare anche l'immagine in **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**. Altri giochi ancora, come per esempio i giochi di cripo-aritmetica, presentano testo e immagini dalla semantica strettamente connessa e richiedono pertanto un approccio multimodale.
L'analisi dei problemi è stata effettuata con un duplice obiettivo: da un lato classificare i giochi in modo da poter individuare quali sono le abilità (umane o computazionali) di risoluzione che più frequentemente vengono richieste; dall'altro evidenziare le connessioni tra IA e psicologia cognitiva per mezzo delle categorie di classificazione che emergono dall'analisi.

## 3.1. Il punto di vista della psicologia cognitiva

La psicologia cognitiva ha un'ampia tradizione di ricerca per quanto riguarda lo studio sulla soluzione di giochi, a partire dai classici lavori sul gioco degli scacchi di de Groot (1965) e Chase e Simon (1973) che hanno contribuito allo sviluppo di diversi concetti divenuti ormai noti per gli addetti ai lavori, come ad esempio quello di "chunking" inteso come il processo di acquisizione di unità di informazione, indipendentemente dalle dimensioni delle stesse. A tal proposito George Miller (1956), formalizzando le teorie empiriche precedenti, ha stimato in sette ± due la quantità di chunk di informazione (i.e., Span di memoria) che è in grado di trattare la memoria a breve termine. Per quanto riguarda lo studio dei processi solutori di problemi, nell'ambito dello Human Information Processing, e in generale della psicologia cognitiva, sono stati elaborati differenti modelli relativi ai vari aspetti del processo di soluzione, il più noto dei quali è il General Problem Solver di Newell e Simon (1972), con l'obiettivo di individuare delle regole e meccanismi generali che permettano di risolvere ampie classi di problemi. L'interesse per lo studio dei problemi

matematici si inscrive in un contesto di evoluzione degli studi classici sul problem-solving e ha permesso di analizzare in dettaglio le abilità e i processi cognitivi che vengono attivati durante la soluzione di un problema e di misurare le differenze individuali nelle prestazioni (e.g., Lucangeli, Tressoldi & Cendron, 1998).
Il modello teorico di riferimento considerato per categorizzare i 147 problemi matematici oggetto del presente studio dal punto di vista della psicologia cognitiva è uno tra i più noti ed esaustivi nella descrizione delle principali abilità implicate nel comportamento intelligente: la teoria CHC (Schneider & McGrew, 2012), Tale teoria deriva dall'integrazione di due modelli distinti: la teoria dell'intelligenza fluida e cristallizzata (Cattell, 1963; Horn et al., 1981) e il modello a tre strati dell'intelligenza di Carroll (1993). Il modello CHC identifica cinque abilità cognitive che costituiscono l'intelligenza generale: il ragionamento fluido, la memoria, la velocità cognitiva, le conoscenze acquisite e le abilità sensoriali e motorie. A loro volta tali abilità generali comprendono più di 70 abilità specifiche (si veda Tabella 1).

*Tabella 1. Il modello CHC*

| **Abilità generali** | **Abilità specifiche** |
| --- | --- |
| **Ragionamento fluido**<br>Utilizzo di operazioni mentali per risolvere problemi nuovi, che non possono essere risolti con l'ausilio di metodi precedentemente appresi. | Ragionamento induttivo, Ragionamento deduttivo, Ragionamento quantitativo |
| **Memoria**<br>1. **Memoria a breve termine** (Span di memoria e Memoria di lavoro)<br>Abilità di apprendere e mantenere vivi in memoria un numero limitato di elementi di informazione<br>2. **Memoria a lungo termine**<br>Abilità di immagazzinare e consolidare in memoria nuove informazioni (concetti, idee, nomi, ecc…) e recuperarle al momento opportuno tramite associazioni | Memoria associativa, Ricordo di storie, Ricordo libero (abilità di ricordare liste di parole), Fluenza (ideativa, associativa, espressiva, relativa a soluzioni alternative, originalità/creatività, facilità di recuperare nomi, parole, immagini, ecc…) |
| **Velocità cognitiva**<br>1. **Velocità di processamento delle informazioni**<br>Abilità di risolvere in maniera automatica compiti cognitivi poco complessi o appresi in precedenza<br>2. **Velocità di reazione o di decisione**<br>Tempo impiegato a prendere decisioni o a fornire giudizi<br>3. **Velocità psicomotoria** | 1. Velocità percettiva, di lettura, di calcolo<br>2. Tempi di reazione, Tempi di risposta, Velocità di processamento semantico, Velocità nel confrontare mentalmente concetti, Tempo impiegato a ispezionare una figura |

| | |
|---|---|
| Velocità e fluidità dei movimenti corporei | 3. Velocità nel movimento, Velocità di scrittura, Velocità nell'articolare le parole |
| **Conoscenze acquisite**<br>**1. Comprensione**<br>Conoscenza del linguaggio, delle nozioni di cultura generale e capacità di applicare queste conoscenze<br><br>**2. Conoscenze specifiche**<br><br><br><br><br>**3. Lettura e scrittura**<br>Abilità di base di lettura e di spelling delle singole parole e abilità di leggere e scrivere un discorso complesso<br>**4. Conoscenze quantitative**<br>Conoscenze relative alla numerosità e alle quantità | 1. Sviluppo del linguaggio, Nozioni di cultura generale, Conoscenza lessicale, Abilità di comprendere le informazioni ascoltate, Abilità comunicative, Competenze grammaticali<br><br>2. Abilità di lettura delle labbra, abilità di canto, conoscenze di geografia, conoscenza di una lingua straniera, conoscenze relative alla scienza, alla meccanica, ecc…<br>3. Decodifica, comprensione e velocità di lettura, abilità e velocità di scrittura, abilità nello spelling, capacità di utilizzare una lingua<br>4. Conoscenze matematiche |
| **Abilità senso-motorie**<br>**1. Processamento visivo**<br>Abilità di generare, immagazzinare e recuperare e trasformare immagini<br>**2. Processamento uditivo**<br>Capacità di elaborare cognitivamente le informazioni acquisite tramite l'udito<br><br><br><br><br><br><br>**3. Abilità olfattive**<br>**4. Abilità tattili**<br>**5. Abilità cinestesiche**<br>6. **Abilità psicomotorie** | 1. Capacità di visualizzazione, Rotazione mentale, Memoria visiva, Scanning mentale, Integrazione seriale percettiva, Capacità di *imagery*, ecc…<br>2. Codifica fonetica, Capacità di discriminare le parole pronunciate, Resistenza alla distorsione uditiva, Memoria di pattern di suoni, Capacità di mantenere e giudicare un ritmo, Giudizi musicali, Capacità di discriminare la provenienza dei suoni, ecc…<br>3. Memoria olfattiva<br>4. Memoria tattile<br>5. Memoria propriocettiva<br>6. Capacità di coordinazione, Precisione nel controllare i movimenti, Abilità nella manualità fine, Equilibrio, ecc… |

L'analisi qualitativa dei giochi matematici considerati in questo lavoro ci ha permesso di individuare specifiche abilità cognitive coinvolte nella risoluzione dei problemi. In particolare si è evidenziato che coloro che si approcciano a tali problemi debbano utilizzare, oltre alle funzioni esecutive (i.e., abilità di ragionamento fluido, capacità mnesiche e velocità di processamento delle informazioni) la cui importanza è già stata ampiamente dimostrata in letteratura (e.g., Le-Blanc & Weber-Russell, 1996; Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004), anche abilità visuo-spaziali fra cui: identificazione di forme e figure; capacità di orientamento nello spazio (e.g., concetti di sopra/sotto, avanti/dietro, destra/sinistra, verticale/orizzontale, punti cardinali); abilità di rotazione mentale e capacità di navigazione nello spazio. Inoltre, al fine di comprendere i problemi presentati ed avere gli strumenti necessari per risolverli, abbiamo evidenziato come sia necessario un bagaglio di conoscenze acquisite fra cui: la capacità di comprensione del testo, abilità di scrittura e lettura, alcune nozioni semantiche (e.g., conoscere come misurare il tempo, il peso, la temperatura ambientale e nozioni economiche di base) e specifiche conoscenze matematiche. In particolare, rispetto alle conoscenze matematiche necessarie per la corretta risoluzione dei problemi, sono apparse indispensabili: le abilità di logica numerica (al fine di risolvere serie numeriche e matrici di numeri), la conoscenza di alcuni elementi di geometria (e.g., lati, angoli, vertici, calcolo dell'area di figure piane e di figure solide, ecc...) e la conoscenza delle operazioni matematiche di base (i.e., addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, frazioni, percentuali).

## 3.2 Il punto di vista dell'IA

Nell'ottica dell'IA l'analisi dei quesiti ha permesso di individuare numerose categorie secondo le quali classificare i giochi matematici. Concentrandoci sulla sola *descrizione del problema*, emergono le seguenti categorie:

- *tipo di problema*, identifica la disciplina matematica a cui il problema può essere ricondotto. Per esempio, se si tratta di un problema aritmetico, logico, di cripto-aritmetica, di ragionamento temporale o spaziale, ecc.;
- *argomento*, se il testo esponga una situazione astratta o reale;
- *tipo di descrizione*, evidenzia l'eventuale presenza di diagrammi nella spiegazione del quesito;

Sotto il profilo dell'IA i problemi possono essere inoltre caratterizzati in base al *modello risolutivo applicabile*. In particolare, sotto questo aspetto emergono le seguenti categorie:

- *tecnica risolutiva*, intesa come la tecnica di IA più indicata per la risoluzione del problema;
- *numero delle tecniche*, identifica l'eventuale necessità di combinare diverse tecniche per trovare una soluzione;
- *tecniche alternative*, ove presenti, altre tecniche in grado di determinare la soluzione del problema;
- *conoscenza nascosta*, evidenzia la necessità di ricorrere a nozioni ulteriori rispetto a quelle esplicitamente descritte nel problema. Solitamente tali nozioni appartengono al cosiddetto "ragionamento di senso comune". Ad esempio, il concetto di "tempo" come una grandezza che può scorrere solo in avanti e in modo uguale per tutti i soggetti considerati. Tali conoscenze rappresentano un elemento di particolare criticità per ogni applicazione in ambito IA.

Infine, i problemi considerati si differenziano in base alla *descrizione della soluzione* e in particolare:

- *forma della soluzione*, intesa come il modo con cui la soluzione deve essere espressa. Per esempio, utilizzando numeri, diagrammi o linguaggio naturale;
- *numero di soluzioni*, evidenzia la possibilità che esistano più soluzioni e in tal caso, se sia necessario elencarle tutte o se sia invece sufficiente individuarne una.

Dal punto di vista pratico, la classificazione ha evidenziato come possano essere individuati ben 18 diversi tipi di problema. La Figura 3 illustra la distribuzione di tali tipi sull'insieme completo dei quesiti, mentre la Figura 4 si concentra sui soli quesiti la cui descrizione è corredata da un diagramma.

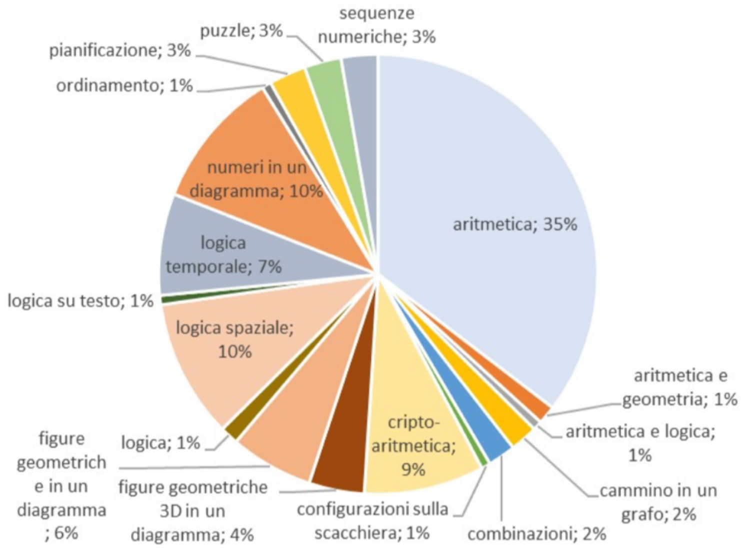


*Figura 3. Statistica sulle tipologie di problemi presenti nell'intero data-set di giochi preso in esame (Buscaroli, 2018).*

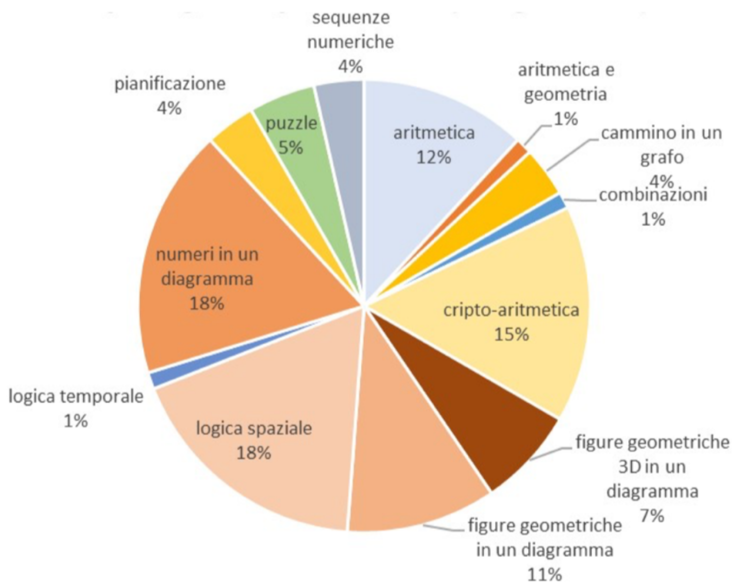


*Figura 4. Statistica sulla tipologia dei giochi con diagramma.*

La tipologia più comune risulta essere “aritmetica” (35% di tutti i problemi considerati, nonché il 67% di quelli senza diagramma). Tra i quesiti con diagramma, le categorie più diffuse sono “numeri in un diagramma”, “logica spaziale” e “cripto-aritmetica”: insieme coprono più della metà dei problemi dotati di diagramma e in nessuna di esse vi sono problemi con solo testo. Altre tipologie in cui i diagrammi sono sempre presenti sono “figure geometriche [3D] in un diagramma” e “puzzle”.

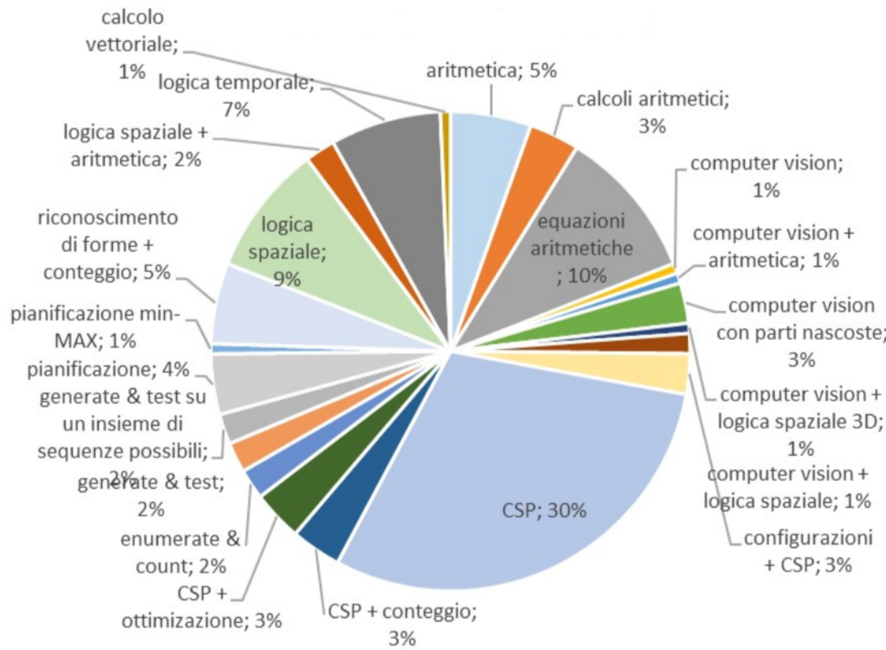



*Figura 5. Statistica sulle tecniche risolutive per il calcolatore*

La distribuzione percentuale delle tecniche risolutive illustrata in Figura 5 evidenzia come la maggioranza dei quesiti sia ascrivibile alla categoria dei Problemi di Soddisfacimento di Vincoli (Constraint Satisfaction Problem o CSP, descritti nel seguito) (Russell & Norvig, 2003). Il 30% dei problemi può essere infatti risolto applicando solamente un approccio CSP, mentre un ulteriore 9% vede la necessità di CSP associato a un'altra tecnica. Se si considerano inoltre i quesiti in cui CSP può essere utilizzata come tecnica alternativa, il 48% dei problemi considerati in questo studio può essere risolto tramite CSP.

Osservando la classificazione completa (Buscaroli, 2018), si nota inoltre come i problemi risolvibili con logica temporale, equazioni o tramite "Generate and Test" (GT, ovvero generando una possibile soluzione e verificandone a posteriori la validità) sono per la maggior parte sprovvisti di diagramma (nel 95% dei casi), mentre quelli di tipo geometrico (risolvibili con logica spaziale, tecniche di visione o simili) ne sono prevedibilmente sempre provvisti. Inoltre, in alcuni casi vi è una forte relazione tra la tipologia di un problema, la rappresentazione del suo modello e le tecniche risolutive. Ad esempio, tutti i problemi delle tipologie "cripto-aritmetica" e "numeri in un diagramma" possono essere descritti e risolti con un CSP e nella maggior parte dei casi essa rappresenta anche la strategia di risoluzione principale. Tutti i "puzzle", i problemi di "logica spaziale" e di "forme geometriche in un diagramma" hanno invece come modello risolutivo applicabile il "riconoscimento di forme" o "forme e configurazioni". I primi hanno sempre come tecnica di risoluzione l'impiego di CSP corredato dall'individuazione di configurazioni geometriche ("configurazioni + CSP"), i secondi ricadono per la maggior parte in problemi di "logica spaziale" e in misura minore in "riconoscimento di forme e conteggio".

Data la loro criticità dal punto di vista dell'IA è inoltre importante sottolineare che ben il 20% dei problemi richiede conoscenze nascoste; tra queste la conoscenza delle unità di misura e relative conversioni, nozioni legate al tempo (durata di mesi e anni, concetto di evento, durata, velocità, e

contemporaneità), pagamenti e tagli di monete, punti cardinali e caratteristiche di oggetti comunemente noti, come i dadi, il tabellone delle freccette o la scacchiera.
Per quanto riguarda le soluzioni, nel 75% dei casi sono costituite da un numero o una lista di numeri. Talvolta però può essere richiesto di completare un diagramma (18%), o di riportare una parola in linguaggio naturale (7%). Soltanto in due casi su 147 viene chiesto di trovare più di una soluzione.
Infine, va evidenziato che il 5% dei quesiti è parso ambiguo nella descrizione del problema o dell'obiettivo anche al risolutore umano.

## 4. Un primo setting sperimentale per comprendere dove risieda la complessità della risoluzione dei CSP

La classificazione dei giochi matematici considerati in questo studio (i.e., Giochi d'Autunno presentati nella sezione 3.1) dal punto di vista dell'IA ha evidenziato che una parte consistente dei quesiti possono essere risolti ricorrendo ai metodi dei CSP, previa una estrazione dal testo (e da eventuali diagrammi) delle informazioni necessarie a modellare il problema. Per questo motivo la nostra indagine si focalizza sui problemi matematici riconducibili a CSP ed in particolare sugli elementi che ne determinano la maggiore o minore complessità, sia dal punto di vista del calcolatore, sia da quello della mente umana.

### 4.1. Come l'IA risolve i CSP: dal modello alla soluzione

I problemi ascrivibili alla tipologia CSP sono problemi definibili formalmente tramite un insieme di variabili $\{X_1, \dots, X_n\}$, l'insieme dei domini $D_i$ di ciascuna variabile, e un insieme di vincoli $\{C_1, \dots, C_m\}$, che coinvolgono una o più variabili e limitano i valori assumibili da esse.
Consideriamo per esempio il quesito seguente:

Q1. *"Sono arrivati in un negozio di animali quattro nuovi esemplari: un gatto, un topo, un ramarro e un serpente. Purtroppo, le gabbie sono solamente tre. Il problema è che il gatto si mangerebbe volentieri sia il topo che il ramarro. Il ramarro a sua volta ha paura del topo, ed il serpente, se potesse, farebbe banchetto del topo. Riesci a suggerire chi potrebbe andare in gabbia insieme?"*

Il quesito ammette due soluzioni corrette: "*serpente e ramarro*" e "*serpente e gatto*".
Il problema è rappresentabile come un CSP a quattro variabili, ciascuna corrispondente a uno degli animali: $X_{\text{gatto}}, X_{\text{topo}}, X_{\text{serpente}}, X_{\text{ramarro}}$. Il valore assunto da ciascuna variabile indica la gabbia (che denomineremo $a, b$ e $c$) in cui è possibile mettere lo specifico animale. Le quattro variabili possiedono lo stesso dominio $D_{\text{gatto}} = D_{\text{topo}} = D_{\text{serpente}} = D_{\text{ramarro}} = \{a, b, \text{c}\}$ poiché ciascun animale potrebbe essere messo in una qualsiasi delle tre gabbie (se non considerassimo i vincoli di incompatibilità). I vincoli che devono essere soddisfatti per ottenere la soluzione del quesito sono: $X_{\text{gatto}} \neq X_{\text{topo}}$, $X_{\text{gatto}} \neq X_{\text{ramarro}}$, $X_{\text{ramarro}} \neq X_{\text{topo}}$, $X_{\text{serpente}} \neq X_{\text{topo}}$.
Si noti che per il CSP indicato esistono più di due soluzioni:

$$X_{\text{gatto}} = a, X_{\text{topo}} = b, X_{\text{serpente}} = a, X_{\text{ramarro}} = c$$
$$X_{\text{gatto}} = b, X_{\text{topo}} = a, X_{\text{serpente}} = b, X_{\text{ramarro}} = c$$
$$X_{\text{gatto}} = a, X_{\text{topo}} = b, X_{\text{serpente}} = c, X_{\text{ramarro}} = c$$
$$X_{\text{gatto}} = b, X_{\text{topo}} = c, X_{\text{serpente}} = a, X_{\text{ramarro}} = a$$
$$X_{\text{gatto}} = c, X_{\text{topo}} = b, X_{\text{serpente}} = a, X_{\text{ramarro}} = a$$
$$\dots$$

Tutte queste soluzioni sono tuttavia riconducibili alle due soluzioni corrette del quesito, che non chiede in quale gabbia possa essere messo ogni animale, ma piuttosto, in modo più generale, chiede quali animali possono stare nella stessa gabbia, indipendentemente dalla specifica gabbia.
Per risolvere il problema, l'approccio CSP prevede di partire da un assegnamento iniziale, e procedere via via conferendo a ciascuna variabile un valore dal suo dominio. Quando tale procedimento giunge ad un assegnamento di tutte le variabili tale per cui tutti i vincoli sono soddisfatti, allora è stata determinata una soluzione per il problema. Il procedimento di assegnamento si configura quindi come la *ricerca* di una soluzione all'interno di uno spazio di risultati possibili. In altri termini, il procedimento può essere inteso come l'esplorazione di un albero decisionale, dove ogni nodo corrisponde a una variabile, e la decisione verte su quali valori alternativi (rami dell'albero) assegnare a tale variabile.
Esistono numerosi algoritmi (con prestazioni differenti) per svolgere la ricerca della soluzione per un CSP, il più semplice (ed in generale meno efficiente) dei quali è quello che va sotto il nome di Generate and Test (GT). L'algoritmo di GT prevede di assegnare un valore del rispettivo dominio a tutte le variabili e poi controllare solo a posteriori, e al termine dell'assegnamento di tutte le variabili, se i vincoli sono soddisfatti. Se così è, abbiamo trovato una soluzione al problema. Se invece esiste almeno un vincolo violato, si riparte da capo generando un altro assegnamento. Per il quesito sopra riportato si potrebbe partire quindi dall'assegnamento $X_{\text{gatto}} = a, X_{\text{topo}} = a, X_{\text{serpente}} = a, X_{\text{ramarro}} = a$ . Controllando i vincoli, ci si accorgerebbe che tale ipotesi di soluzione li viola tutti, quindi si genererebbe il successivo assegnamento: $X_{\text{gatto}} = a, X_{\text{topo}} = a, X_{\text{serpente}} = a, X_{\text{ramarro}} = b$. I vincoli $X_{\text{gatto}} \neq X_{\text{topo}}$ e $X_{\text{serpente}} \neq X_{\text{topo}}$ sono ancora violati, quindi si genererebbe $X_{\text{gatto}} = a, X_{\text{topo}} = a, X_{\text{serpente}} = a, X_{\text{ramarro}} = c$ e così via, esplorando tutte le combinazioni possibili di assegnamenti fino a trovare una soluzione che non violi alcun vincolo.
Ovviamente questo algoritmo può impiegare molto tempo per determinare la soluzione perché potrebbe dover compiere molti tentativi prima di individuare un assegnamento che rispetti tutti i vincoli. In particolare, se la cardinalità dei domini è *b* e il numero delle variabili è *n*, le soluzioni generate (ma che non necessariamente rispettano i vincoli del problema) sarebbero $b^n$ (nel nostro caso quindi $3^4$, cioè 81). Pertanto, l'algoritmo GT è applicabile solo a problemi semplici come quello riportato pocanzi, caratterizzati da poche variabili i cui domini hanno cardinalità ristretta. GT risulta di fatto inutilizzabile per trattare problemi del mondo reale, come problemi di allocazione delle risorse o pianificazione automatica, poiché essi presentano solitamente un elevato numero di variabili (dell'ordine di migliaia) e domini dalle cardinalità consistenti. Per questi casi vengono solitamente usati algoritmi più evoluti (Russell & Norvig, 2003), in cui la ricerca della soluzione è condotta sfruttando euristiche che permettono di evitare di generare alcuni degli assegnamenti che violano vincoli.
In generale, considerando le tre dimensioni che caratterizzano un CSP (numero di variabili, cardinalità dei domini, vincoli), è immediato comprendere come un maggior numero di variabili e una più consistente cardinalità dei domini determinino uno spazio più grande in cui ricercare la soluzione, e quindi, inevitabilmente una maggior complessità. Al contrario, il numero di vincoli del CSP riduce lo spazio di ricerca e, come tale, contribuisce a diminuire la complessità del problema se tali vincoli sono utilizzati prima di avere eseguito tutti gli assegnamenti come nel GT, evitando di generare soluzioni palesemente sbagliate. Ad esempio, nel caso precedente un algoritmo di soluzione diverso da GT potrebbe prevedere di associare un valore alla prima variabile, per esempio $X_{\text{gatto}} = a$, e utilizzare tale assegnamento per restringere i domini delle altre variabili libere. Infatti, poiché il gatto è già stato messo nella gabbia *a,* e il topo e il ramarro non

possono essere messi nella stessa gabbia del gatto, i valori possibili per $X_{\text{topo}}$ e $X_{\text{ramarro}}$ sono ora soltanto $D_{\text{topo}} = D_{\text{ramarro}} = \{b, \mathrm{c}\}$. Al contrario, il dominio della variabile $X_{\text{serpente}}$ rimane inalterato $D_{\text{serpente}} = \{a, b, \mathrm{c}\}$. Allo stesso modo si potrebbe procedere affidando un valore ad un'altra variabile e restringendo ulteriormente i domini delle variabili libere fino a che non rimanesse un solo valore possibile per ogni variabile. Questo procedimento iterativo viene chiamato "forward checking".

Adottando questo sistema è anche possibile che si giunga ad una configurazione tale per cui non sia più possibile assegnare alcun valore alle variabili libere e, pertanto, non sia possibile determinare una soluzione corretta. Ad esempio, supponiamo di procedere oltre l'assegnamento $X_{\text{gatto}} = a$, affidando il valore $X_{\text{serpente}} = b$ (restringendo quindi il solo dominio $D_{\text{topo}} = \{c\}$) e poi $X_{\text{ramarro}} = c$. Quest'ultimo assegnamento elimina anche *c* dalle possibili gabbie per il topo e si ha $D_{\text{topo}} = \emptyset$ : la sequenza di assegnamenti seguita fin qui non porta quindi ad una soluzione per il CSP. Pertanto, è necessario compiere qualche passo indietro (un'operazione denominata comunemente "backtracking" in IA) e provare a modificare qualche scelta passata. Se per esempio all'ultimo passo, invece di occuparci del ramarro, avessimo scelto $X_{\text{topo}} = c$, allora avremmo avuto $D_{\text{ramarro}} = \{b\}$, cui avremmo potuto far seguire $X_{\text{ramarro}} = b$, determinando quindi la soluzione del CSP $X_{\text{gatto}} = a, X_{\text{serpente}} = b, X_{\text{topo}} = c, X_{\text{ramarro}} = b$.

Combinando "forward checking" e "backtracking" si ottiene in generale una soluzione al CSP in un tempo molto più limitato rispetto all'applicazione di GT. Tuttavia, poiché per molti dei quesiti dei Giochi d'Autunno considerati in questo studio riconducibili a CSP le dimensioni sono piuttosto limitate (pochissime variabili e domini con cardinalità ridotta), un calcolatore moderno potrebbe applicare GT come procedimento risolutivo e trovare comunque la soluzione in un tempo estremamente limitato. Il ragionamento umano invece tipicamente evita questa strategia, preferendo meccanismi che lo aiutino a ridurre lo spazio di ricerca.

È inoltre importante sottolineare come la formulazione fornita del CSP che risolve il problema Q1 non sia l'unica possibile. Avremmo per esempio potuto decidere di modellare le gabbie come variabili a cui assegnare una lista di valori corrispondenti agli animali. Contrariamente a quanto accade per gli esseri umani, per un computer il vero scoglio alla soluzione di un quesito come Q1, non è l'effettivo calcolo delle possibili soluzioni del CSP, ma la sua iniziale modellazione, cioè il compito di comprendere dal testo quali siano le variabili e quali i domini, oltre a capire il numero e la tipologia dei vincoli espliciti e impliciti insiti nel quesito.

### 4.2. Come i bambini risolvono i CSP

Per analizzare il procedimento che i bambini adottano quando si trovano a risolvere un CSP, sono stati creati alcuni problemi matematici di difficoltà crescente (si veda Appendice). In ambito IA la difficoltà nel risolvere problemi riguarda diversi aspetti. Storicamente, un aspetto "difficile" è stato quello relativo alla complessità del problema, misurata ad esempio nei CSP in termini di (numero di) variabili, di (numero di) valori possibili, e di (numero di) vincoli. In tale ambito l'IA ha conosciuto negli ultimi anni i suoi maggiori progressi, tanto che oggigiorno problemi con migliaia di variabili e migliaia di vincoli possono essere facilmente risolti con l'uso di un comune personal computer. Diversamente, come già introdotto nella Sezione 1, una sfida non ancora risolta per l'IA, è il passaggio dalla descrizione in linguaggio naturale (ed eventuale diagramma) di un gioco matematico, ad una sua rappresentazione tramite un modello che ne permetta poi la risoluzione. Questa trasformazione (dal testo/diagramma del problema al modello) rappresenta una delle difficoltà maggiori per la odierna IA. Lo stesso non si può dire per gli esseri umani, e ancora più

in modo eclatante per i bambini: dato un problema di tipo CSP con centinaia di variabili, un bambino può trovare banale la comprensione del testo, ma trovare arduo gestire l'elevato numero di variabili. Per quanto riguarda i bambini sorge quindi spontaneo l'interrogativo se vi sia (e di quale tipo sia) una relazione tra la complessità di un CSP e la difficoltà sperimentata dai bambini nel risolvere tali problemi.
Sono stati quindi creati alcuni problemi, in cui le seguenti caratteristiche sono state progressivamente incrementate:

- il numero di variabili;
- la cardinalità dei domini, così da incrementare il numero di valori che le variabili possono assumere;
- il numero di vincoli.

In merito a quest'ultima dimensione, sono stati considerati vincoli che coinvolgono semplici disuguaglianze tra variabili. Tali problemi sono riconducibili alla classe denominata "map coloring" (Russell & Norvig, 2003), in cui l'assegnamento di valori a variabili deve essere fatto rispettando dei vincoli di diverso (i.e., vincoli che impongono che due variabili non possano assumere lo stesso valore).

### 4.2.1 Procedura

I problemi matematici sono stati somministrati durante l'orario scolastico a 37 alunni (18 femmine e 19 maschi) di età media 9.27 anni (DS=0.50), frequentanti il 4° anno della scuola primaria dell'Istituto Comprensivo Dozza Imolese-Castel Guelfo (Bologna). Dopo aver ottenuto dai genitori il consenso al trattamento dei dati, tutti i bambini sono stati valutati tramite alcuni test (Matrici colorate di Raven e subtest della WISC-IV del calcolo a mente) al fine di accertare che le loro capacità di ragionamento logico-deduttivo e di calcolo rientrassero nella norma. Nessuno ha mostrato punteggi decisamente inferiori o superiori alla norma.
A tutti i bambini sono poi stati somministrati individualmente i problemi matematici. In particolare i problemi sono stati letti ad alta voce dall'esaminatore, mentre i bambini seguivano il testo sul foglio di risposta, al fine di evitare eventuali problemi nella comprensione del testo scritto. Per ciascun problema, dopo che i bambini avevano fornito la risposta, è stato chiesto loro quali elementi del problema avevano valutato e quale ragionamento avevano seguito durante il problem-solving al fine di evidenziare le strategie di risoluzione utilizzate e le principali difficoltà incontrate durante l'esecuzione.

### 4.2.2 Risultati

Dall'analisi dei risultati è emerso che i bambini sono riusciti a risolvere più facilmente alcuni problemi rispetto ad altri. In particolare, i problemi n.2 (M=.94, DS=.22) e n.8 (M=1.00, DS=0) sono stati risolti dalla totalità o dalla maggior parte di essi; i problemi n.3 (M=.82, DS=.37), n.6 (M=.63, DS=.45), n.7 (M=.63, DS=.48) sono stati risolti da circa il 60% dei bambini; infine i problemi n.4 (M=.56, DS=.08) n. 5 (M=.46, DS=.08) e n. 1 (M=.56, DS=.08) sono risultati i più difficili da risolvere. Tuttavia, va evidenziato che all'aumentare della complessità dei problemi, non diminuiscono le performance; infatti la difficoltà (IA) influisce sulle prestazioni in maniera non lineare ($F_{6,289}$=9.71, p<.001), come mostrato in Figura 6.

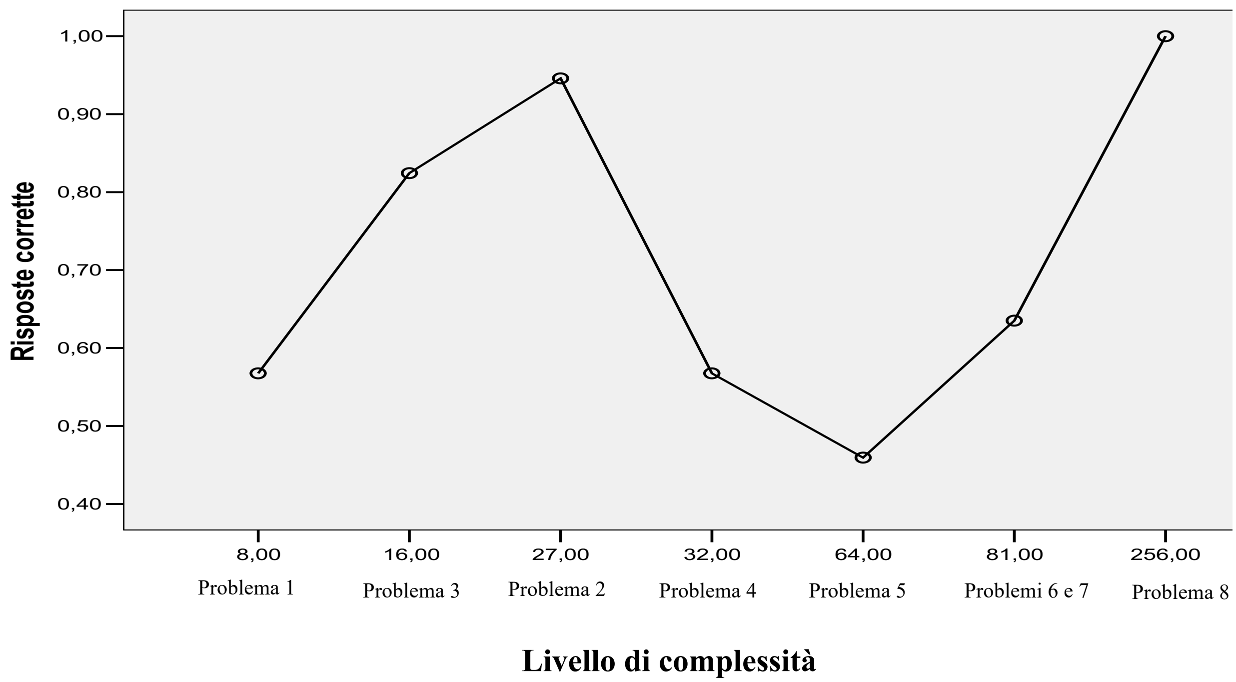



*Figura 6. Relazione fra complessità dei problemi e numero di risposte corrette*

Considerato quindi che le principali difficoltà incontrate dai bambini nella risoluzione dei problemi non sono legate alla complessità del CSP, abbiamo deciso di valutare quali caratteristiche condividessero i problemi più facilmente risolvibili e, di contro, quali fossero le peculiarità distintive dei problemi di più difficile risoluzione. È emerso che i problemi con un numero equivalente di variabili e domini (problemi n. 2 e n. 8; M=.97, ES=.02) sono stati risolti più facilmente dei problemi con un numero differente di variabili e domini (problemi n. 1,3,4,5,6,7; M=.61, ES=.04) $F_{2,6}$=82.61, p<.001. Nell'ambito sia dell'IA che della psicologia del decision-making, un problema può essere rappresentato come un albero decisionale con sequenze di passaggi in cui ogni nodo prevede diverse possibilità di scelta. Utilizzando questa rappresentazione mentale, la differenza tra le due tipologie di problemi risiede nel numero di momenti decisionali, all'interno dell'albero decisionale. Un'ipotesi esplicativa potrebbe essere che i problemi che presentano domini con cardinalità pari al numero di variabili potrebbero facilitare il processo decisionale e quindi i bambini, dovendo effettuare meno scelte, avrebbero meno occasioni di incorrere in un errore, pertanto la quantità di scelte errate sarebbe potenzialmente inferiore rispetto ai problemi con un numero differente di variabili e domini.

## 5. Discussione sui primi esperimenti effettuati

Dal punto di vista delle scienze cognitive, il comportamento intelligente dell'uomo può essere definito come l'abilità di acquisire, comprendere e usare la conoscenza al fine di raggiungere obiettivi specifici (Passer & Smith, 2004). Tali obiettivi vengono raggiunti creando programmi mentali strutturati che permettono alle persone di selezionare le informazioni rilevanti per giungere alla decisione e seguire una sequenza di azioni organizzando il compito o il problema in step o "epoche cognitive" (Duncan et al., 2000). Studi recenti hanno identificato specifiche regioni cerebrali della corteccia frontale e parietale (i.e., Multiple-Demand system) che si attivano quando le persone affrontano problemi di logica (Duncan et al., 2010). Si può ipotizzare che, durante il processo di problem-solving, le informazioni acquisite durante la lettura del testo di un problema matematico vengano organizzate in "chunk" di informazioni (e.g., numero di variabili ed elementi dei domini, vincoli che legano fra loro le variabili) e mantenute attive nella memoria di lavoro al fine di essere processate, contemporaneamente o serialmente, seguendo un ragionamento logico, oltre che di tipo quantitativo, per poter giungere alla soluzione. È piuttosto ovvio che all'aumentare del numero di informazioni presenti in memoria aumenti la difficoltà del problema per i bambini, che hanno limitate capacità di memoria a breve termine (così come gli adulti). Ma non è solo questo fattore che determina la complessità dei problemi, questo studio ci ha infatti permesso di evidenziare che all'aumentare del numero di momenti decisionali aumenti la difficoltà del problema. Alla luce delle teorie dei sistemi duali (e.g., Evans & Stanovich, 2013), il processo risolutorio procede in maniera rapida, utilizzando un tipo di processamento automatico (vedi Sistema 1) e nel momento in cui deve essere presa una decisione, si inserisce un processamento più lento (vedi Sistema 2), durante il quale l'individuo cerca di capire quale sia l'operazione logica da seguire per procedere nella risoluzione del problema e inibisce risposte automatiche errate. Entrambi i sistemi possono indurre in errore seppure con modalità differenti. La rapidità del Sistema 1 potrebbe contrastare l'attivazione di meccanismi inibitori adeguati, mentre il Sistema 2 potrebbe fallire nell'esecuzione di processi logico-formali complessi.

Dal punto di vista dell'IA, il risultato relativo al fatto che problemi con un numero equivalente di variabili e domini vengano risolti più facilmente dei problemi con un numero differente degli stessi è fonte di interessanti spunti di ricerca. In particolare, parrebbe da questo primo test, che il vincolo comunemente detto di "all different" (le variabili devono assumere valori tutti differenti tra loro) risulti di facile comprensione e applicazione ai bambini. Questo vincolo, invece, in ambito IA, è riconosciuto avere un certo grado di complessità, tanto che algoritmi *ad-hoc* sono stati proposti per risolverlo in modo efficiente. Al contrario, i semplici vincoli di diverso sono tra i più semplici da gestire in ambito IA, ma in alcuni problemi sono risultati essere particolarmente difficili per i bambini. Tale caratteristica potrebbe essere spiegata con l'osservazione che un vincolo di diverso imposto tra due variabili comporta il gestire contemporaneamente entrambi i domini delle due variabili, implicando quindi uno sforzo mnemonico. Invece il vincolo di all-different può essere applicato su un unico dominio comunque a tutte le variabili, comportando quindi un minore sforzo di memorizzazione. Si noti infine che l'esistenza di più soluzioni simmetriche potrebbe aver generato nei bambini dubbi sulla correttezza della loro soluzione. Al contrario, in IA, l'esistenza di soluzioni simmetriche di per sé non è un problema (almeno non nella fase di ricerca di una soluzione).
Infine, sebbene con modalità diverse, è interessante notare che la ricerca di una soluzione che abbia richiesto dei passi di backtracking (cioè, assegnamento di tentativo di alcuni valori ad alcune variabili, che si rivela solo in seguito sbagliato rispetto ai vincoli, e che quindi richiede un "ritornare sui propri passi" per fare assegnamenti diversi), è risultata essere difficile sia per i bambini che per gli algoritmi di IA (dove però il costo del backtracking è un risultato noto).

## 6. Discussione e lavori futuri

In questo lavoro abbiamo presentato i primi risultati preliminari di uno studio che stiamo portando avanti nell'ambito del progetto ASIA-GiM. Un contributo di questo lavoro ha riguardato una prima classificazione dei termini e delle competenze usate nell'ambito di IA e nell'ambito della psicologia cognitiva, nella risoluzione di una particolare classe di problemi, che è quella dei giochi matematici. Tali problemi sono stati scelti in virtù delle loro caratteristiche: in particolare, la loro risoluzione non richiede competenze specializzate e approfondite, ma richiede comunque competenze basilari di matematica, logica, comprensione del testo, e di ragionamento di senso comune. Proprio questa ultima competenza risulta a volte essere un grande ostacolo alle tecniche di IA. Più in generale, i giochi matematici risultano difficili per l'IA proprio nel passaggio dalla loro descrizione "human-oriented" in termini di linguaggio naturale, accompagnato eventualmente da diagrammi, ad un modello formale del problema che sia interpretabile da un computer.
Un altro contributo di questo lavoro ha riguardato una piccola sperimentazione con bambini di quarta elementare, nel cercare di comprendere alcuni dei meccanismi di soluzione da loro adottati, e confrontarli con i metodi tipici dell'IA. Tale sperimentazione è stata svolta utilizzando un insieme molto semplice di problemi, riconducibili alla tipologia di CSP (e map-coloring in particolare).

Questo lavoro è da considerarsi come un primissimo passo verso la risoluzione di giochi matematici tramite agenti software intelligenti completamente autonomi. In tal senso, una prima problematica ancora aperta che affronteremo nel futuro è il riconoscimento automatico della tipologia di problema proposto, e l'adozione della tecnica di modellazione (e di risoluzione) più appropriata. Poiché le tecniche di IA che ricadono sotto la denominazione di Machine Learning hanno recentemente raggiunto progressi sorprendenti per quanto riguarda la classificazione automatica di esempi, si potrebbe pensare di applicarle alla categorizzazione dei problemi matematici, così da permettere ad un calcolatore di determinare velocemente la tecnica risolutiva più opportuna per un determinato gioco. Tuttavia, è importante ricordare come tali tecniche di apprendimento siano intrinsecamente legate alla disponibilità di numerosi esempi (dell'ordine di migliaia) sulla base dei quali imparare correttamente le correlazioni tra i dati e le categorie da assegnare. Nell'ambito dei giochi matematici non sono attualmente disponibili insiemi di esempi sufficientemente grandi da permettere un'affidabile categorizzazione automatica. Questa osservazione apre ulteriori spunti di ricerca, mostrando una interessante differenza fra l'apprendimento in IA legato alla disponibilità di una notevole quantità di esempi e l'apprendimento degli umani in cui spesso sono sufficienti anche pochi esempi significativi per accrescere dinamicamente le capacità di soluzione di problemi.

Una seconda direzione di ricerca futura riguarda la creazione di agenti software autonomi nella risoluzione dei giochi, ispirati anche alle architetture cognitive attualmente disponibili. Due architetture in particolare appaiono di maggior interesse a riguardo: ACT-R (Anderson, 1983) e SOAR (Laird et al., 2017). Entrambe offrono un framework di riferimento dove lo sviluppo di agenti intelligenti trova interessanti spunti implementativi.

## Acknowledgements

Questo lavoro è stato parzialmente finanziato nel contesto del progetto ASIA-GiM, iniziativa ALMA Idea 2017 – Università degli Studi di Bologna.

## Appendice

***Problema 1 (3 variabili, 2 domini, 2 vincoli)***

Mario, Filippo e Luca sono grandi tifosi di calcio. In particolare, Mario tifa per una squadra diversa da Filippo, e Filippo tifa per una squadra diversa da Luca. Sapendo che le squadre sono Milan e Juventus, sapreste dire che squadra tifa ciascuno dei tre amici?

***% risposte corrette: 56.8*** *(la differenza fra risposte corrette e errate non è significativa, Q=0.67, p=.41)*

| | | |
|---|---|---|
| ***Risposte plausibili*** | ***8 (2^3)*** | |
| ***Di cui errate*** | ***6*** | |
| ***Di cui corrette*** | ***2*** | *Mario – Milan; Filippo – Juventus; Luca – Milan*<br>*Mario – Juventus; Filippo – Milan; Luca – Juventus* |
| ***Ammette più soluzioni?*** | ***Si*** | |
| ***Contiene ambiguità nella formulazione del quesito?*** | ***Si*** | |

***Risposte errate fornite dai partecipanti***:

*(5.4%) Mario Milan, Luca Juve, Filippo Inter*
*(8.1%) Mario Milan, Filippo Juve, Luca Inter*
*(10.8%) Mario Inter, Filippo Milan, Luca Juve*
*(2.7%) Mario Milan, Luca Juve, Filippo nessuna squadra*
*(2.7%) Mario Juve, Filippo Milan, Luca un'altra squadra*
*(5.4%) Mario Milan, Filippo Juve, Luca Bologna*
*(2.7%) Mario Milan, Filippo Juve, Luca "non lo so"*
*(2.7%) Mario Milan, Filippo Juve, Luca Juve*
*(2.7%) Mario Milan, Filippo Juve, Luca per entrambe*

***Problema 2 (3 variabili, 3 domini, 2 vincoli)***

A Chiara, Paola, e Daniela piacciono molto le bambole. A Chiara piace una bambola diversa da quella che piace a Paola, e Paola a sua volta preferisce una bambola diversa da quella che piace a Daniela. Sapendo che le bambole sono una Barbie, una Winx e una Baby Mia, sapreste dire quale bimba gioca con quale bambola?

***% risposte corrette: 94,6*** *(la differenza fra risposte corrette e errate è significativa, Q=29.43, p=.001)*

| | | |
|---|---|---|
| ***Risposte plausibili*** | ***27 (3^3)*** | |
| ***Di cui errate*** | ***15*** | |
| ***Di cui corrette*** | ***12*** | *Chiara – Barbie; Paola – Winx; Daniela – Baby Mia*<br>*Chiara – Barbie; Paola – Winx; Daniela – Barbie*<br>*Chiara – Barbie; Paola – Baby Mia; Daniela – Winx* |

| | | |
|---|---|---|
| | | *Chiara – Barbie; Paola – Baby Mia; Daniela – Barbie …* |
| ***Ammette più soluzioni?*** | ***Si*** | |
| ***Contiene ambiguità nella formulazione del quesito?*** | ***Si*** | |

***Risposte errate fornite dai partecipanti**:*
*(2.7%) Chiara - Winx, Paola - Winx, Daniela - Baby Mia*
*(2.7%) Chiara – Winx; Paola – Baby Mia; Daniela – Ken*

***Problema 3 (4 variabili, 2 domini, 3 vincoli)***

Francesco, Giovanni, Matteo e Giorgio vogliono fare una partita di ping-pong a coppie e devono fare le squadre. Hanno deciso di chiamare le due squadre "Draghi" e "Leoni". Il problema è che Francesco non vuole stare in squadra con Giovanni, Giovanni non vuole stare in squadra con Matteo, e Matteo non vuole stare in squadra con Giorgio. Riesci a fare le squadre?

***% risposte corrette: 81.1*** *(la differenza fra risposte corrette e errate è significativa, Q=16.89, p=.001)*

| | | |
|---|---|---|
| ***Risposte plausibili*** | ***16 (2^4)*** | |
| ***Di cui errate*** | ***14*** | |
| ***Di cui corrette*** | ***2*** | *Draghi: Francesco, Matteo; Leoni: Giovanni, Giorgio*<br>*Draghi: Giovanni, Giorgio; Leoni: Francesco, Matteo* |
| ***Ammette più soluzioni?*** | ***Si*** | |
| ***Contiene ambiguità nella formulazione del quesito?*** | ***No*** *(in parte si, poiché il quesito ammetterebbe solo risposte si/no)* | |

***Risposte errate fornite dai partecipanti**:*
*(2.7%) Draghi: Francesco e Matteo, Leoni: Giovanni e Giorgio; altra squadra: Giorgio e Francesco*
*(5.4%) Draghi:Matteo e Giorgio; Leoni: Giovanni e Francesco*
*(10.8%) Draghi: Giorgio e Francesco; Leoni: Giovanni e Matteo*

***Problema 4 (5 variabili, 2 domini, 4 vincoli)***

In una scuola elementare ci sono cinque classi (1A, 2A, 3A, 4A, 5A), e due sale per il pranzo (la sala verde e la sala gialla). Gli alunni sono un po' dispettosi, e quindi si è deciso che la 1A non può mangiare nella stessa sala con la 2A; la 3A non può mangiare con la 2A; la 4A non può mangiare con la 3A; e infine, la 5A non può mangiare nella stessa sala con la 4A. Riesci ad assegnare ogni classe ad una delle due sale?

***% risposte corrette: 54.1*** *(la differenza fra risposte corrette e errate non è significativa Q=1.32, p=.25)*

| | | |
|---|---|---|
| ***Risposte plausibili*** | ***32 (2^5)*** | |
| ***Di cui errate*** | ***30*** | |
| ***Di cui corrette*** | ***2*** | *Sala verde: 1A 3A 5A; Sala Gialla: 2A 4°*<br>*Sala verde: 2A 4A; Sala Gialla: 1A 3A 5A* |

| | | |
|---|---|---|
| ***Ammette più soluzioni?*** | ***Si*** | |
| ***Contiene ambiguità nella formulazione del quesito?*** | ***No*** *(in parte si, poiché il quesito ammetterebbe solo risposte si/no)* | |

***Risposte errate fornite dai partecipanti****:*
*2 (5.4%) 1A e3A gialla; 2Ae 5A verde; 4A altra sala*
*(5.4%) 1° e 3° gialla; 2° e 3° verde; 5° e 1° altra sala*
*(2.7%) 1A e 3A gialla; 4A e 2A verde; 5A e 2A altra sala*
*(2.7%) 5A e2A gialla; 3A e 4A verde; 1A e 3A altra sala*
*(2.7%) 1° e 4° gialla; 2° e 5° verde; 1° e 3° altra sala; 5° e 3° altra sala*
*(8.1%) 1°, 4° e 3° verde; 2° e 5° gialla*
*(8.1%) 5°, 2° e 4° verde; 1° e 3° gialla*
*(5.4%) 5°e 3°e 2° gialla; 4° e 1° verde*
*(2.7%) 1° e 5° verde; 2°, 4° e 3° gialla*
*(2.7%) 4° e 5° gialla; 1°, 3° e 2° verde*

***Problema 5 (6 variabili, 2 domini, 5 vincoli)***
Un giorno, durante la ricreazione, 6 bimbi cominciano a litigare. Aldo, Barbara, Carlo, Daniela, Enrico, Francesca, discutono se sia più bello andare in vacanza in montagna o al mare. Aldo non è d'accordo con Barbara, che la pensa diversamente da Carlo, il quale a sua volta la pensa diversamente da Daniela. Enrico ha un'idea diversa sia da Daniela che da Francesca. Secondo te, chi vuole andare al mare e chi in montagna?
***Il problema ammette 2 soluzioni:***
***% risposte corrette: 43.2*** *(la differenza fra risposte corrette e errate non è significativa Q=0.27, p=.86)*

| | | |
|---|---|---|
| ***Risposte plausibili*** | ***64 (2^6)*** | |
| ***Di cui errate*** | ***62*** | |
| ***Di cui corrette*** | ***2*** | *Mare: A, C, E; Montagna: B, D, F*<br>*Mare: B, D, F; Montagna: A, C, E* |
| ***Ammette più soluzioni?*** | ***Si*** | |
| ***Contiene ambiguità nella formulazione del quesito?*** | ***No*** | |

***Risposte errate fornite dai partecipanti****:*
*(16.2%) Mare: A,D,C; Montagna: B,E,F*
*(13.5%) Mare: A,D,F; Montagna: B,C,E*
*(2.7%) Mare: A, C, B, F; Montagna: D, E*
*(2.7%) Mare: E, F; Montagna: D,B, A, C*
*(2.7%) Mare: A,D,E; Montagna: B,C,F*
*(2.7%) Mare: A,D; Montagna: B,E,F, C*
*(2.7%) Mare: D,A,F,B; Montagna: E,C*
*(2.7%) Mare: E,A,F; Montagna: B,C,D*
*(2.7%) Mare: A,C,E,B; Montagna: D,F*
*(2.7%) Mare: E,D,F; Montagna: A,B,C*
*(2.7%) Mare: A,D,F; Montagna: B; sia mare che montagna: C,E*
*(2.7%) Mare: F,B; Montagna: E,C; altro luogo: A,D*

***Problema 6 (4 variabili, 3 domini, 4 vincoli)***
Sono arrivati in un negozio di animali quattro nuovi esemplari: un gatto, un topo, un ramarro e un serpente. Purtroppo le gabbie sono solo tre. Il problema è che il gatto si mangerebbe volentieri sia il topo che il ramarro. Il ramarro a sua volta ha paura del topo. E il serpente? Beh, il serpente se potesse farebbe banchetto del topo. I proprietari del negozio non sanno quali animali mettere in quali gabbie. Riesci a suggerire un'idea di chi potrebbe andare insieme in gabbia?
***% risposte corrette: 56.8*** *(la differenza fra risposte corrette e errate non è significativa Q=2.18, p=.13)*

| | | |
|---|---|---|
| ***Risposte plausibili*** | ***81 (3^4)*** | |
| ***Di cui errate*** | ***69*** | |
| ***Di cui corrette*** | ***12*** | *Ad esempio: Gatto e serpente; ramarro; topo.<br>Serpente e ramarro; topo; gatto.* |
| ***Ammette più soluzioni?*** | ***Si*** | |
| ***Contiene ambiguità nella formulazione del quesito?*** | ***No*** | |

***Risposte errate fornite dai partecipanti***:
*(27%) gatto + serpente; ramarro + topo*
*(8.1%) gatto + ramarro; serpente + topo*
*(2.7%) gatto + ramarro; serpente; topo*
*(2.7%) serpente + topo; ramarro; gatto*
*(2.7%) ramarro+topo; serpente; gatto*

***Problema 7 (4 variabili, 3 domini, 5 vincoli)***
Aldo, Barbara, Carlo e Daniela devono colorare un cartellone assieme. Sono disponibili tanti pennarelli, ma solo di tre colori: il rosso, il verde, e il blu. Aldo vuole un colore diverso da quello di Barbara e Daniela; anche Carlo vuole un colore diverso da quello di Barbara e Daniela. Infine Barbara vuole un colore diverso da quello di Daniela. La maestra ha bisogno di aiuto: quali colori diamo a quali bimbi?
***% risposte corrette: 62.2*** *(la differenza fra risposte corrette e errate non è significativa Q=3.27, p=.07)*

| | | |
|---|---|---|
| ***Risposte plausibili*** | ***81 (3^4)*** | |
| ***Di cui errate*** | ***75*** | |
| ***Di cui corrette*** | ***6*** | *Ad esempio: Aldo e Carlo prendono il rosso; Barbara prende il blue; Daniela prende il verde.* |
| ***Ammette più soluzioni?*** | ***Si*** | |
| ***Contiene ambiguità nella formulazione del quesito?*** | ***No*** | |

***Risposte errate fornite dai partecipanti***:
*(5.4%) A-blu, B+C-verde, D-rosso*
*(5.4%) B+D-blu; C-rosso; A-verde*
*(5.4%) D-rosso; C-verde; B+A-blu*
*(2.7%) A-rosso, B-verde, D-blu, C-senza colore*
*(2.7%) B-blu; C-verde; A-rosso; D-senza colore*

*(2.7%)  A+C+B-rosso; D-blu*
*(2.7%) D+A-verde; A+B-rosso*
*(2.7%) A+B rosso; D+C verde*
*(2.7%) D+C-rosso; B+A-verde; C+A-blu*
*(2.7%) D+C-blu; B-verde; A-rosso*
*(2.7%) D+A-verde; B-rosso; C-blu*

***Problema 8 (4 variabili, 4 domini, 6 vincoli)***

Aldo, Barbara, Carlo e Daniela devono fare un esperimento di scienze. Ognuno di loro deve scegliere un seme, piantarlo, e far nascere una piantina. La maestra offre loro dei semi di fagioli, di piselli, di fragola, e di lenticchie. I quattro bimbi si mettono d'accordo affinché ognuno di loro scelga una piantina diversa; inoltre Daniela è allergica alle fragole. I bambini sono indecisi su quale piantina scegliere... Riesci a proporre una piantina ad ognuno di loro?

***% risposte corrette: 100*** *(la differenza fra risposte corrette e errate è significativa Q=37.00, p=.000)*

| | |
|---|---|
| ***Risposte plausibili*** | ***256   (4^4)*** |
| ***Di cui errate*** | ***238*** |
| ***Di cui corrette*** | ***18*** *ognuna delle quali prevede l'assegnamento di una piantina diversa ad un bimbo diverso, e Daniela non ha la fragola* |
| ***Ammette più soluzioni?*** | ***Si*** |
| ***Contiene ambiguità nella formulazione del quesito?*** | ***No*** |

## Bibliografia


Anderson J. R. (1983): *The architecture of cognition*. Harvard University Press http://act-r.psy.cmu.edu/

Anderson, J. R., Reder, L. M., & Lebiere, C. (1996). Working memory: Activation limitations on retrieval. *Cognitive psychology*, 30(3), 221-256.

Baddeley, A.D., & Logie, R.H. (1999). Working memory: The multiple-component model. In A. Miyake & P. Shah (Eds.), *Models of working memory: Mechanisms of active maintenance and executive control* (pp. 28–61). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Bobrow, D. (1964). *Natural Language Input for a Computer Problem Solving System.*Bocconi, U. (2019). *Giochi d'Autunno*. Tratto da https://giochimatematici.unibocconi.it/index.php/archivio-giochi/tipo-gara/giochi-d-autunno

Buscaroli, R. (2018). Un approccio alla risoluzione di giochi matematici in un contesto multimodale. Bologna.

Carroll J.B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Case, R. (1995). Capacity-based explanations of working memory growth: A brief history and reevaluation. In F. E. Weinert & W. Schneider (Eds.), *Memory performance and competencies: Issues in growth and development* (pp.23–44). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cattell R.B. (1963). Theory of fluid and crystallized intelligence: A critical experiment. *Journal of Educational Psychology*, 54(1), 1-22.

Chase, W. G., & Simon, H. A. (1973). The mind's eye in chess. In W. G. Chase (Ed.), Visual information processing (pp. 215-281). New York: Academic Press.

Chesani F., Mello P., & Milano M. (2017). Solving Mathematical Puzzles: A Challenging Competition for AI. *AI Magazine*, 38(3), 83-96

Clark, P., Harrison, P., & Balasubramanian, N. (2013). A study of the knowledge base requirements for passing an elementary science test. . *Proceedings of the 2013 Workshop on Automated Knowledge Base Construction, AKBC '13.* , (p. 37–42). New York, NY, USA.

de Groot A. D. (1965). Through and choice in chess. The Hague: Mouton.

Duncan J., et al. (2000). A neural basis for general intelligence. *Science*, 289, 457–460

Evans, J. S. B., & Stanovich, K. E. (2013). Dual-process theories of higher cognition: Advancing the debate. *Perspectives on Psychological Science*, 8(3), 223-241.

Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning.* MIT Press.

Horn, J.L., Donaldson, G., & Engstrom, R. (1981). Apprehension, memory, and fluid intelligence decline in adulthood. *Research on Aging*, 3(1), 33-84.

Hosseini, M. J., Hajishirzi, H., Etzioni, O., & Kushman, N. (2014). Learning to solve arithmetic word problems with verb categorization. *Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing.* Moschitti, A.; Pang, B.;Daelemans, W.

Jonassen D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational technology research and development*, 48(4), 63-85.

Kail, R., & Hall, L.K. (1999). Sources of developmental change in children's word-problem performance. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 660.

Laird J. E., Lebiere C., and Rosenbloom P. S. (2017). A Standard Model for the Mind: Toward a Common Computational Framework across Artificial Intelligence, Cognitive Science, Neuroscience, and Robotics., AI Magazine 38(4). https://soar.eecs.umich.edu/

Le Blanc, M.D., & Weber-Russell, S. (1996). Text integration and mathematical connections: A computer model of arithmetic word problem solving. *Cognitive Science*, 20, 357–407.

Lucangeli, D., Tressoldi, P., & Cendron, M. (1998). Cognitive and metacognitive abilities involved in the solution of mathematical word problems: validation of a comprehensive model. *Contemporary Educational Psychology, 23*, 257-275.

Mayer, R.E., & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problem solving.In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp.29–54). Mahwah, NJ: Erlbaum.

McGoogan, C. (2015). *This Japanese AI Is Competing for Top University Places.* Tratto da http://www.wired.co.uk/article/ai-passes-japanese-university-entrance-exam

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, *63*(2), 81.

Newell, A. & Simon, H.A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

Passer M.W., & Smith, R.E. (2004). *Psychology: The science of mind and behavior* (2nd ed.). New York, NY, US: McGraw-Hill.

Russell, S.J., & Norvig, P. (2003). *Artificial intelligence - a modern approach, 2nd Edition.* Prentice Hall.

Schneider W.J., & McGrew K.S. (2012). The Cattell-Horn-Carroll model of intelligence. In D.P. Flanagan, P.L. Harrison (Ed.), *Contemporary Intellectual Assessment: Theories, Tests and Issues* (3rd ed. pp. 553-581). New York: The Guilford Press.

Seo, M. J., Hajishirzi, H., Farhadi, A., Etzioni, O., & Malcolm, C. (2015). Solving geometry problems: Combining text and diagram interpretation. *Proceedings of the 2015 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing, {EMNLP} 2015, Lisbon, Portugal, September 17-21, 2015*, (p. 1466-1476).

Strickland, E. (2013). *http://spectrum.ieee.org/robotics/artificial-intelligence/can-an-ai-get-into-the-university-of-tokyo.* Tratto da IEEE Spectrum News, Can an AI Get into the University Of Tokyo?

Swanson, H. L., & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The relationship between working memory and matematical problem solving in childern at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 96, 471-491.

Swanson, H. L., & Sachse-Lee, C. (2001). Mathematical problem solving and working memory in children with learning disabilities: Both executive and phonological processes are important. *Journal of experimental child psychology*, 79(3), 294-321.