No 231 - 5 000 - 10-58 - MM
Société Anonyme A. CITROËN
Reproduction interdite

CALCUL de la Tolérance

Introduction La notion d'usinage numérique est liée à celle de tolérance, qui conditionne la validité de l'interpolation (linéaire ou non) entre les points de calcul. Rapidement on est conduit à envisager le calcul de l'écart entre l'interpolation linéaire et l'interpolation parabolique. Mais l'expérience démontre vite la faiblesse de cette solution (inflexions, asymptotiques)

Ce document fait le point sur la question et réalise un compromis raisonnable entre la complexité du calcul nécessaire et la qualité du résultat acquis. Par ses démonstrations il précise et complète les travaux antérieurs. Ceux-ci, mi-intuitifs, mi-empiriques étaient devenus insuffisants, nous laisserons au lecteur le soin de faire la comparaison, qui est intéressante à plus d'un titre.

Un exposé complet sur la tolérance demande de nombreux chapitres. Le calcul des écarts proprement dits, est très étudié ici. Les notions relatives au calcul du pas idéal sont aussi exposées, mais sont beaucoup plus subtiles.

Nous admettrons le plan général suivant :

Observations

I a) Ecart d'une fonction du troisième degré avec sa corde.
b) Extrapolation, interpolation de l'arc étudié avec origine commune. Validité.
c) Extrapolation à un arc contigu.

II Calcul des Ecarts sur une courbe et une surface.
Intervention de la notion de parallèle. Formules théoriques –

a) Ecart Normal . Applicable à une courbe (c'est alors le seul)
b) Ecart géodesique
c) Ecart de Sillons
d) Interférence entre eux.
e) Correction pour excès matière et validité. 1ère Test de convexité –
f) Correction de convexité – 2e Test de Convexité –

III Test de validité – Fourchette de tolérance –

a) Réajuster le pas – Validité – Perfectionnement possible
b) Prévoir le pas suivant – Prévision du 1er pas –

IV Quantification du pas – Problème posé –
Quantification des passages – Aperçu –

V Conclusions – Généralisations possibles à d'autres fraises –

ECART ENTRE UNE COURBE DU TROISIÈME DEGRÉ ET SA CORDE

Supposons la fonction $\varphi(x)$ du troisième degré, connue dans le segment $(x_0\, x_1)$

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

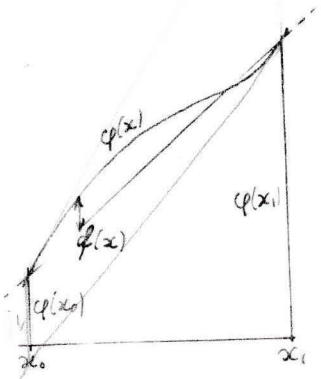
l'écart $f(x)$ peut s'écrire

$$f(x) \equiv \varphi(x) - \left[\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\varphi(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\varphi(x_1) \right]$$

Que l'on peut exprimer exactement.

$$f(x) \equiv (x-x_0)(x-x_1)\left[c + d(x+x_0+x_1)\right]$$

Il est plus facile de l'exprimer à partir de ses dérivées en $x_0\, x_1$



$$f'(x_0) = \varphi'(x_0) - \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{x_1-x_0} = (x_0-x_1)\left[c + d(2x_0+x_1)\right] = t_0$$

$$f'(x_1) = \varphi'(x_1) - \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{x_1-x_0} = (x_1-x_0)\left[c + d(x_0+2x_1)\right] = t_1$$

En posant $\lambda = \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$ et $\mu = \dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}$ $\quad \lambda+\mu = 1$

Il vient ($\lambda = 0$ pour $x = x_0$ $\quad \lambda = 1$ pour $x = x_1$)

$$f(x) = (x_1-x_0)\left[t_0 \lambda\mu^2 + t_1 \lambda^2 \mu \right]$$

En effet $f(x)$ est nul aux deux extrémités $\lambda=0\ \mu=1$ ou $\lambda=1\ \mu=0$

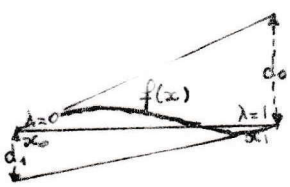
et $df(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda + \dfrac{\partial f}{\partial \mu} d\mu$ $\quad$ avec $d\lambda + d\mu = 0$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial f}{\partial \mu}\right)\dfrac{1}{x_1-x_0}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = (t_0\mu^2 + 2t_1\lambda\mu) - (2t_0\lambda\mu + t_1\lambda^2)$ $\quad = t_0$ pour $\lambda=0$ $\ \mu=1$
$\quad = t_1$ pour $\lambda=1$ $\ \mu=0$

Par suite on posera $\quad t_0(x_1-x_0) = d_0$

$$-t_1(x_1-x_0) = d_1$$



$$\boxed{f(x) = \lambda\mu^2 . d_0 + \lambda^2 \mu\, d_1}$$

Ce qui est facile à relier à la théorie des courbes à pôles.

D'après les propriétés connues on a donc pour le maximum de f

$$df = (f'_\lambda - f'_\mu)\, d\lambda = 0 \qquad f'_\lambda = f'_\mu$$

or $3f = \lambda f'_\lambda + \mu f'_\mu = f'_\lambda = f'_\mu = \mu^2 d_0 + 2\lambda\mu d_1 = 2\lambda\mu d_0 + \lambda^2 d_1 =$ (1)

Ce qui s'écrit $\dfrac{2\lambda\mu - \mu^2}{d_1} = \dfrac{2\lambda\mu - \lambda^2}{d_0} = \dfrac{\mu^2 - \lambda^2}{d_0 - d_1} = \dfrac{\mu - \lambda}{d_0 - d_1}$

Or si on résoud l'équation du second degré (1) en $\frac{\mu}{\lambda}$ et en $\frac{\lambda}{\mu}$ il vient

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{d_0 - d_1 \pm \sqrt{\Delta}}{d_0} = \frac{d_1}{d_1 - d_0 \pm \sqrt{\Delta}} = \frac{d_0 \pm \sqrt{\Delta}}{d_1 \pm \sqrt{\Delta}}$$

les signes $\pm$ se correspondent $\Delta = d_0^2 - d_0 d_1 + d_1^2$

Or ceci s'écrit

$$\frac{\mu}{d_0 \pm \sqrt{\Delta}} = \frac{\lambda}{d_1 \pm \sqrt{\Delta}} = \frac{1}{d_0 + d_1 \pm 2\sqrt{\Delta}} = \frac{\mu - \lambda}{d_0 - d_1} = \frac{2\lambda\mu - \lambda^2}{d_0} = \frac{2\lambda\mu - \mu^2}{d_1} = \frac{\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2}{\pm\sqrt{\Delta}} = \frac{3\lambda\mu}{d_0 + d_1 \pm \sqrt{\Delta}} \quad (2)$$

Le maximum de f s'écrit donc pour la détermination positive de $\sqrt{\Delta}$ (on aurait de même tous les cas en $-\sqrt{\Delta}$)

$$f = \lambda\mu(\mu d_0 + \lambda d_1) = \frac{1}{3}\,\frac{d_1 + d_0 \pm \sqrt{\Delta}}{d_1 + d_0 \pm 2\sqrt{\Delta}}\,(\mu d_0 + \lambda d_1)$$

mais $\mu d_0 + \lambda d_1 = \dfrac{d_0^2 + d_1^2 \pm (d_0 + d_1)\sqrt{\Delta}}{d_0 + d_1 \pm 2\sqrt{\Delta}} = \dfrac{d_0 + d_1) \pm \sqrt{\Delta}}{3}$ comme on pourra le vérifier.

On a donc $$E_{max} = \frac{1}{9}\,\frac{[d_0 + d_1 \pm \sqrt{\Delta}]^2}{d_0 + d_1 \pm 2\sqrt{\Delta}}$$

Si $d_1 d_0 > 0$ il y a une racine dans l'intervalle. La détermination de $\sqrt{\Delta}$ est du même signe que $d_0 + d_1$, ce qui donne des valeurs de λ et μ dans l'intervalle $(0,1)$ - voir les équations (2).

Si $d_1 d_0 < 0$ La racine qui donne l'écart maximum est telle $\mu > \lambda$ si $|d_0| > |d_1|$ donc $|d_0| + \sqrt{\Delta} > |d_1| + \sqrt{\Delta}$

Si nous supposons $(0, +d_0)$ comme sur la figure de la page 3 on a manifestement $d_0 + \sqrt{\Delta} > d_1 + \sqrt{\Delta}$

Dans tous les cas si on se borne à la valeur absolue de E_{max}

$$E_{max} = E = \frac{1}{9}\,\frac{[|d_0 + d_1| + \sqrt{\Delta}]^2}{|d_0 + d_1| + 2\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{9}\left[\,|d_0 + d_1| + \frac{d_0^2 - d_0 d_1 + d_1^2}{|d_0 + d_1| + 2\sqrt{\Delta}}\,\right]$$

$$\Delta = d_0^2 - d_0 d_1 + d_1^2.$$

d_0 représente l'écart de la fonction linéaire qui extrapole la tangente en x_0, et la corde, pour un intervalle $x_1 - x_0$

d_1 représente le phénomène à l'autre extrémité de l'arc.

La formule est rigoureuse et s'applique dans tous les cas particuliers, comme on le vérifie pour les cas particuliers tels que parabole $d_0 = d_1$, inflexion $d_0 + d_1 = 0$ etc ....

Extrapolation d'un arc. Soit à étudier l'arc $\begin{cases}\lambda=0\\ \mu=1\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0\end{cases}$

Les poles étaient

A	B	C	D
0	$\frac{1}{3}d_0$	$\frac{1}{3}d_1$	0

l'opérateur étant $\mu A + \lambda B$

Les sous poles se trouvent de la façon classique. en triplant tous les éléments on a

0			
	λd_0		
d_0		$2\lambda\mu d_0 + \lambda^2 d_1$	
	$\mu d_0 + \lambda d_1$		$3\lambda\mu^2 d_0 + 3\lambda^2\mu d_1$
d_1		$\mu^2 d_0 + 2\lambda\mu d_1$	
	μd_1		
0			

En déduisant ceux de la corde (eux aussi triplés)

$0 \quad (\lambda\mu^2 d_0 + \lambda^2\mu d_1) \quad 2(\lambda\mu^2 d_0 + \lambda^2\mu d_1) \quad 3(\lambda\mu^2 d_0 + 3\lambda^2\mu d_1)$

Il vient

$$0 \quad (\lambda^3 + 2\lambda^2\mu)d_0 - \lambda^2\mu d_1 \;,\; 2\lambda^2\mu d_0 + (\lambda^3 - \lambda^2\mu)d_1 \;,\; 0$$

d'où

$$\boxed{\begin{cases} D_0 = \lambda^2 \left[d_0 + \mu (d_0 - d_1) \right] \\ D_1 = \lambda^2 \left[d_1 + 2\mu (d_0 - d_1) \right] \end{cases}}$$

Ceci permet de passer d'un arc $x_0 \,,\, x_0 + \Delta x$ à un arc $x_0 \,,\, x_0 + p.\Delta x$ d_0 et d_1 étant remplacés par D_0 et D_1

$$\boxed{\begin{aligned} D_0 &= p^2 \left[d_0 + (1-p)(d_0 - d_1) \right] \\ D_1 &= p^2 \left[d_1 + 2(1-p)(d_0 - d_1) \right] \end{aligned}}$$

VALIDITÉ. On vérifie que l'opération $q(p\Delta x)$ et $p(q\Delta x)$ sont équivalentes. En effet si $d_0 \neq d_1 = \sigma_0$ $d_0 - d_1 = \delta_0$ on a

$$\begin{cases} \sigma_p = p^2 \left[\sigma_0 + 3(1-p)\delta_0 \right] \\ \delta_p = p^2 \left[\delta_0 - (1-p)\delta_0 \right] = p^2 \delta_0 \end{cases}$$

$$\sigma_{qp} = q^2 \left[\sigma_p + 3(1-q)\delta_p \right] = q^2 p^2 \left[\sigma_0 + 3(1-p)\delta_0 + 3(1-q)\delta_0 . p \right]$$

$$\begin{cases} \sigma_{qp} = q^2 p^2 \left[\sigma_0 + 3(1 - p.q)\delta_0 \right] \\ \delta_{qp} = q^3 . p^3 \left[\delta_0 \right] \end{cases}$$

Le test de validité étant vérifié, comme cela devient évident sur les 2 formules précédentes, on peut donc en toute sécurité passer d'un arc, à un arc quelconque, y compris voisin, en faisant $p = -1$, pour passer à l'arc suivant.

Nous avons ici une formule qui permet d'évaluer l'écart d'une fonction, qui s'annulle aux deux extrémités d'un arc, et dont on peut calculer la dérivée aux deux extremités.

Avant de l'appliquer aux courbes et aux surfaces, nous allons essayer de définir les conditions requises.

Pour une surface il y en a trois, pour une courbe la première suffit (en remplaçant le mot surface par le mot courbe)

Le centre de fraise décrit un segment de droite, puis un autre, et ainsi de suite.

1° Principe — A tout instant de son parcours la fraise centrée en P, coupe une surface parallèle à $+T_1$, sans être sécante avec la surface à usiner – (de façon à rester en excès matière, mais ceci n'est pas obligatoire, on peut prendre $S+\frac{T}{2}$ et $S-\frac{T}{2}$ ou S et $S-T$)

T_1 est designée sous le nom de tolérance normale.

2° Principe — A tout instant de son parcours une fraise de rayon majoré de la tolérance T_2 (hypothétique $R+T_2$), coupe la courbe lieu du point M de la surface.

T_2 est designée sous le nom de tolérance géodésique.

3° Principe — Le trajet de fraise terminé, la surface parallèle à T_3 à la surface usinée, a complétement disparue.

T_3 est designée sous le nom de tolérance entre sillons.

En fait nous adapterons un peu ces 3 principes, car les trois notions interfèrent entre-elles. Avant de passer au détail du calcul

Le point de la surface à usiner est appelé M, sur la courbe homologue, m s'il n'est pas sur cette courbe.

La surface de fraise est definie de la même façon par P, p mais le point d'un segment P_1P_2 sera appelé Q.

La surface de base, definie mathématiquement, peut être distincte, définie par les point B, b

Il importe donc de pouvoir calculer les éléments en M, m à partir de ceux definis en B, b.

Le problème est le même pour passer de M en P, N étant la normale unitaire en B, M ou P on peut écrire

$$P = M + R\vec{N} \qquad R \text{ rayon de fraise}$$

$$M = B + p\vec{N} \qquad p \text{ distance de la surface definie à la surface usinée.}$$

Aussi nous allons rappeler certaines formules classiques et en donner une extension, dans les cas où il sera nécessaire. Elles permettent le passage de M en P, le lecteur pourra de lui-même l'appliquer aux autres cas (B→M B→P)

Le développement de Taylor au point M, limité au 2e degré est

$$M = M_0 + \frac{\partial M_0}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial M_0}{\partial \ell} d\ell + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_0}{\partial \lambda^2} d\lambda^2 + \frac{\partial^2 M_0}{\partial \lambda \partial \ell} d\lambda . d\ell + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_0}{\partial \ell^2} d\ell^2 \ldots$$

la longueur $\overrightarrow{M_0M}$ donne la première forme quadratique.

$$dM^2 = M_0\overrightarrow{M}^2 = E\, d\lambda^2 + 2F\, d\lambda\, d\ell + G\, d\ell^2 \quad \text{avec} \quad E = \left(\frac{\partial M_0}{\partial \lambda}\right)^2 \quad F = \frac{\partial M_0}{\partial \lambda}.\frac{\partial M_0}{\partial \ell}$$

La projection de $\overrightarrow{M_0M}$ sur la normale donne : $G = \left(\frac{\partial M_0}{\partial \ell}\right)^2$

$$N.d^2M = E' d\lambda^2 + 2F' d\lambda . d\ell + G' d\ell^2 \qquad E' = N_0.\frac{\partial^2 M_0}{\partial \lambda^2} \quad F' = N_0.\frac{\partial^2 M_0}{\partial \lambda \partial \ell} \quad G' = N_0.\frac{\partial^2 M_0}{\partial \ell^2}$$

Il serait intéressant de calculer E_p, F_p, G_p ; E'_p, F'_p, G'_p relatifs à la parallèle P.

Or en dérivant $P = M + R\vec{N}$ (on laissera tomber ici les indices $M_0 P_0$)

$$(1)\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \lambda} = \frac{\partial M}{\partial \lambda} + R\frac{\partial N}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial P}{\partial \ell} = \frac{\partial M}{\partial \ell} + R\frac{\partial N}{\partial \ell} \end{cases} \quad \text{or } N^2 = 1 \text{ donne } N\frac{\partial N}{\partial \lambda} = N\frac{\partial N}{\partial \ell} = 0$$

$$\text{d'où } (2)\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial \lambda} = a\frac{\partial M}{\partial \lambda} + b\frac{\partial M}{\partial \ell} \\ \frac{\partial N}{\partial \ell} = \alpha\frac{\partial M}{\partial \lambda} + b\frac{\partial M}{\partial \ell} \end{cases}$$

En dérivant $N\frac{\partial M}{\partial \lambda} = N\frac{\partial M}{\partial \ell} = 0$ on trouve encore.

$$(3)\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial \lambda}.\frac{\partial M}{\partial \lambda} = -N\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} = -E' = aE + bF \\ \frac{\partial N}{\partial \ell}.\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \frac{\partial N}{\partial \lambda}\frac{\partial M}{\partial \ell} = -N\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda . \partial \ell} = -F' = aF + bG = \alpha E + \beta F \\ \frac{\partial N}{\partial \ell}.\frac{\partial M}{\partial \ell} = -N\frac{\partial^2 M}{\partial \ell^2} = -G' = \alpha F + \beta G \end{cases}$$

Ce qui donne.

$$(4)\begin{cases} E_p = E - 2RE' + R^2\left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2 \\ F_p = F - 2RF' + R^2\left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}.\frac{\partial N}{\partial \ell}\right) \\ G_p = G - 2RG' + R^2\left(\frac{\partial N}{\partial \ell}\right)^2 \end{cases}$$

$$\text{Or } (5)\begin{cases} \left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2 = -aE' - bF' \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}.\frac{\partial N}{\partial \ell}\right) = -aF' - bG' = -\alpha E' - \beta F' \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \ell}\right)^2 = -\alpha F' - \beta G' \end{cases}$$

il y a compatibilité de trois équations à 2 inconnues a et b d'où on tire

$$(6)\quad \left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2 = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & E' \\ F & G & F' \\ E' & F' & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} \qquad \left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}.\frac{\partial N}{\partial \ell}\right) = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & F' \\ F & G & G' \\ E' & F' & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} \qquad \left(\frac{\partial N}{\partial \ell}\right)^2 = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & F' \\ F & G & G' \\ F' & G' & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

Ce qui résout la 1ère Partie du problème.

Reste à calculer E'_p, F'_p, G'_p qui paradoxalement sont plus simples.

En effet les équations (3) et leurs analogues en P donnent par addition.

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}+\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right) = -\vec{N}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}\right) \quad \text{en multipliant par } -R \text{ il vient}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}-\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}+\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right) = R\vec{N}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}\right)$$

$$E - E_p = R\,(E' + E'_p)$$

De même $\left(\frac{\partial M}{\partial \ell}-\frac{\partial P}{\partial \ell}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}+\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right) = R\vec{N}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda\,\partial \ell}+\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda\,\partial \ell}\right)$

mais ici $\frac{\partial M}{\partial \ell}\frac{\partial P}{\partial \lambda}-\frac{\partial P}{\partial \ell}\cdot\frac{\partial M}{\partial \lambda} = R\left(\frac{\partial M}{\partial \ell}\cdot\frac{\partial N}{\partial \lambda}-\frac{\partial N}{\partial \ell}\cdot\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)=0$

d'où $F - F_p = R\,(F' + F'_p)$

et de même on aurait $\lambda \to \ell$.

$$G - G_p = R\,(G' + G'_p)$$

et par suite on peut écrire :

$$E - E_p = 2RE' - R^2\left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2 = R\,(E' + E'_p)$$

$$RE'_p = RE' - R^2\left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2$$

$$(7)\quad \boxed{\begin{aligned} E'_p &= E' - R\left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2 \\ F'_p &= F' - R\left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial N}{\partial \ell}\right) \\ G'_p &= G' - R\left(\frac{\partial N}{\partial \ell}\right)^2 \end{aligned}}$$

La ressemblance avec la dérivée de (4) est frappante. (= $\frac{1}{2}$ dérivée par rapport à R)

Le rappel de la formule du rayon de courbure permettra de terminer ce chapitre d'ordre général.

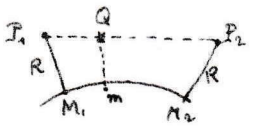
$$R = \frac{d\vec{M}^2}{N.d^2M} = \frac{E\,d\lambda^2 + 2F\,d\lambda.d\ell + G\,d\ell^2}{E'd\lambda^2 + 2F'\,d\lambda.d\ell + G'\,d\ell^2}$$

Nous laisserons au lecteur le soin de voir ce qu'il devient sur la parallèle, et le mettre en garde contre la formule simpliste $R \pm R$ qui est totalement inexacte, en dehors des rayons principaux.

ETUDE de L'ÉCART NORMAL

Si on se réfère au 1er Principe d'un point Q du trajet de fraise P_1P_2 supposé rectiligne on abaisse la podaire Qm à la surface, et on en évalue la longueur.

Aux extrémités de l'arc on obtient évidemment M_1 et M_2 et la podaire a pour longueur le rayon de fraise.



$$P_1 = M_1 + R\,\vec{N_1}$$
$$P_2 = M_2 + R\,\vec{N_2}$$

$$Q = m + k\,\vec{N}$$

Différentions cette dernière équation.

$$dQ = dm + dk\,\vec{N} + k\,d\vec{N}$$

Si on remarque que $N.dm = N.d\vec{N} = 0$ on a encore. $(N^2 = 1)$

$$\vec{N}.d\vec{Q} = dk$$

On la fonction $k - R$ peut être envisagée sous l'angle d'une fonction nulle en M_1 et M_2 et dont on peut connaître la dérivée.

En extrapolant la différentielle dk, quand Q arrive en P_2 on a

$$\boxed{d_1 = \vec{N_1}.\vec{P_1P_2}}$$

de même

$$\boxed{d_2 = -\vec{N_2}.\vec{P_1P_2} = \vec{N_2}.\vec{P_2P_1}}$$

D'où l'écart normal

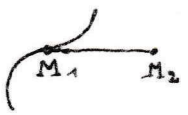
$$\boxed{E_N = \frac{1}{9}\left[\,|d_1+d_2| + \frac{d_1^2 - d_1d_2 + d_2^2}{|d_1+d_2| + \sqrt{d_1^2 - d_1d_2 + d_2^2}}\,\right]}$$

Dans les applications pratiques, on considère souvent d_2 avec son signe opposé quitte à changer les signes qu'il faut dans la formule de E_N.

Nous verrons comment dans le cas des courbes et surfaces convexes on est conduit à modifier cette formule, mais avant nous allons démontrer les autres formules donnant les écarts géodésiques et entre sillons.

Nous verrons aussi par la suite comment modifier le calcul de façon à rester en excès matière, autrement dit à tenir compte du signe de E_N.

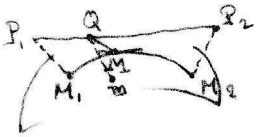
Ces aménagements étant moins bien établies, nous allons donc étudier l'écart géodésique.



Si on considère la figure de révolution ci-contre, on voit qu'en M_1 et M_2 le plan tangent est constant, l'écart normal est constamment nul, et pris d'un optimisme dangereux, on fera un seul segment ce qui endommagera la partie supérieure de la moulure considérée.

Ce qui nous conduit, à la notion d'écart géodésique.

ETUDE de L'ÉCART GÉODÉSIQUE.



Si le pied m de la podaire tombe assez loin de la courbe M l'effet est donc important, nous allons d'abord essayer d'évaluer la longueur Mm maxi, avec les hypothèses que Qm et QM sont perpendiculaires respectivement au plan tangent en m à la surface et à la tangente en M à la courbe.

Soit u le paramètre variable entre M_1 et M_2 (λ ou l, ou encore une combinaison). La tangente est $\frac{\partial M}{\partial u}$, soit v un paramètre distinct de u appelons

$\vec{n}$ le vecteur unitaire de $\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} - \left(\frac{\partial M}{\partial u}\cdot\frac{\partial M}{\partial v}\right)\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$

(Dans le cas où $u=\lambda$ $v=l$ $E\frac{\partial \vec{M}}{\partial l} - F\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}$ dont la longueur est $\sqrt{E(EG-F^2)}$)

$\vec{n}\cdot\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = 0$ comme on le constate, on l'appelera normale géodesique.

On peut donc écrire.

$$Q = M + h\vec{n} + k\vec{N}$$

qui en M_1 devient :

$$P_1 = M_1 + 0.\vec{n} + R\vec{N_1}$$

Nous dérivons cette équation donnant Q. (variable seule u)

$$dQ = dM + dh.\vec{n} + dk.\vec{N} + h\,d\vec{n} + k\,d\vec{N}.$$

et nous formons $\vec{n}.dQ$ $\begin{cases}\vec{n}.\vec{N}=0 & \vec{n}^2=1 \text{ donne } \vec{n}.d\vec{n}=0\\ \vec{n}.d\vec{M}=0 & \text{mais } \vec{n}.d\vec{N}+\vec{N}.d\vec{n}=0\end{cases}$

$$\vec{n}.d\vec{Q} = dh + k\,\vec{n}.d\vec{N}.$$

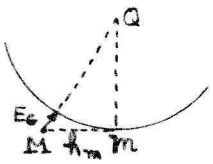
$$\vec{n_1}.\vec{P_1P_2} = \delta_1 + R\,\vec{n_1}.\Delta\vec{N}$$

$\Delta\vec{N}$ devrait avoir la valeur $\frac{\partial \vec{N}}{\partial u}.\Delta u$ on trouverait $\vec{n}.d\vec{N} = \frac{EF'-E'F}{\sqrt{E(EG-F^2)}}$

On peut simplifier $\vec{n_1}.\vec{P_1P_2} = \vec{n_1}\vec{M_1M_2} + \vec{n_1}.(R\vec{N_2} - R\vec{N_1})$.

avec $R\,\vec{n_1}.\Delta\vec{N} \neq R\,\vec{n_1}(\vec{N_2}-\vec{N_1})$

La tolérance géodesique étant utile surtout quand $\vec{N_2}-\vec{N_1}$ est très petit.

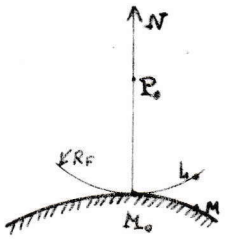


d'où $\vec{n_1}.\vec{P_1P_2}$ est remplacé par $\vec{n_1}.\vec{M_1M_2} = \delta_1$ $\vec{n_2}.\vec{M_2M_1} = \delta_2$

$$h_m \text{ Maxi } h = \frac{1}{9}\left[(\delta_1+\delta_2) + \frac{\delta_1^2 - \delta_1\delta_2 + \delta_2^2}{(\delta_1+\delta_2)+\sqrt{\delta_1^2-\delta_1\delta_2+\delta_2^2}}\right]$$

Ramené sur le rayon de fraise, on trouve l'écart géodesique, variation de la longueur de la podaire de Q par rapport à la courbe M.

$$Eg \neq \frac{h_m^2}{2R_f}$$



ECART ENTRE SILLONS.

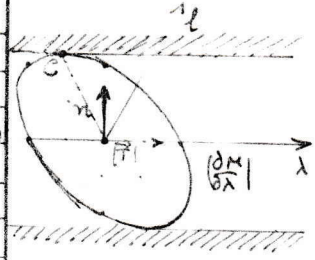
En un point M_0 la fraise est en contact avec la surface, en faisant abstraction des phénomènes déjà étudiés.

Un point voisin M est à une distance du plan tangent facile à déterminer.

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = \frac{1}{2}\left[E'd\lambda^2 + 2F'd\lambda dl + G'dl^2 \right]$$

Le point correspondant L de la fraise tel que $\overrightarrow{M_0M}$ et $\overrightarrow{M_0L}$ soient de infiniments petits de même ordre (en projection sur le Plan tangent)

$$\overrightarrow{M_0L} \cdot \vec{N} = \frac{\overrightarrow{M_0M}^2}{2R} = \frac{1}{2}\left[\frac{E}{R} d\lambda^2 + \frac{2F}{R} d\lambda . dl + \frac{G}{R} dl^2 \right]$$



$$\vec{N} \cdot \left(\overrightarrow{ML}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{E}{R} - E'\right) d\lambda^2 + 2\left(\frac{F}{R} - F'\right) d\lambda . dl + \left(\frac{G}{R} - G'\right) dl^2 \right] = \frac{1}{2}\left[e\,d\lambda^2 + 2f\,d\lambda\,dl + g\,dl^2 \right]$$

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{ML}$ étant une forme définie positive il faut $f^2 - eg < 0$ sinon $\vec{N} \cdot \overrightarrow{ML}$ s'annulerait et il y aurait interférence de courbure.

Vue dans le plan tangent la trace est une ellipse pour $|LM|$ donné. C'est l'ellipse qui généralise l'indicatrice d'EULER, a Ecart entre sillons $|LM|$ donné. $E_S = |LM| = \vec{N} \cdot \overrightarrow{ML}$

Cette ellipse, supposée constante, enveloppe un ruban et l'écart Δl admissible dépend du point caractéristique C situé sur le diamètre conjugué.

$$\begin{cases} f'_{d\lambda} = e\,d\lambda + f\,dl \\ f'_{dl} = f\,d\lambda + g\,dl \end{cases}$$

la direction conjuguée de $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \lambda}$ est donc $e\,d\lambda + f\,dl$ d'où

$$\frac{d\lambda}{-f} = \frac{dl}{e} = dq \quad \text{et} \quad E_s = \frac{1}{2}\left[e\,(eg - f^2)\,dq^2 \right]$$

$$\text{d'où } dq = \frac{\sqrt{2E_s}}{\sqrt{eg - f^2}\,e}$$

La valeur de Δl admissible pour un écart E_s donné est donc

$$\boxed{\Delta l = 2e\,dq = 2\sqrt{\frac{2e \cdot E_s}{eg - f^2}}}$$

$eg - f^2 > 0$ Non interférence
$e > 0$ car $E_s > 0$
(Si autrefois $\vec{N}$ orientée de M vers P)
Si $R_F < 0$ $e < 0$ $E_s < 0$

On sait que l'on prend le plus petit des Δl considérés sur un passage.
Pour des raisons que nous allons voir, on doit considérer aussi la valeur métrique de cet écart, Intervalle entre sillons.

$$\boxed{\vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial l} \Delta l\right) = I_s}$$

Le lecteur généralisera sans peine à des paramètres u, v distincts de λ et l.

INTERFÉRENCES ENTRE LES ÉCARTS

TOLÉRANCE.

On pourra étudier un découpage de courbe de façon à ce que la somme des 2 premiers écarts soit limité.

$$E_N + E_G \ll T_C$$

On essayera autant que possible de se rapprocher du cas d'égalité

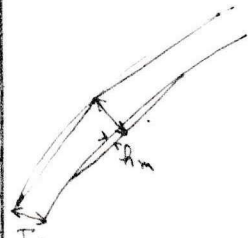
$$E_N + \frac{h_m}{2R_F} \leq T_C$$

R_F est supposé positif, comme l'est E_N

Ceci règle la question de l'intérférence des 2 premiers écarts. Reste à voir l'intérférence des 2 derniers, car dans ce dernier cas on négligera le premier, en supposant bien entendu que la tolérance courbe est beaucoup plus petite que celle imposée entre passages, en pratique elle s'ajoutent.

Mais en ce qui concerne la tolérance géodesique, entre 2 courbes voisines, l'écart rigoureux n'est pas du seulement à Δl mais aussi à h_m

Pour éviter les chevauchements dans les cas critiques il faut considérer l'écart $I_s + h_m$ au lieu de I_s.



$$\frac{I_s + h_m}{I_s} \cdot \Delta l = 2\sqrt{\frac{2e \cdot E_s}{eg - f^2}}$$

d'où le Δl en fonction d'une tolérance entre passage $T_{EP} = E_s$.

$$\Delta l = \frac{I_s}{I_s + h_m} \cdot \left(2\sqrt{\frac{2e \cdot T_{EP}}{eg - f^2}}\right)$$

CORRECTION POUR EXCÈS MATIÈRE (1er Test de CONVEXITÉ)

(FACULTATIF)

Pour un trajet sur une "courbe convexe" l'écart nul aux deux extrémités devient negatif. la podaire passe de R à R-T.

De façon à rester en excès matière on peut porter R+T sur la normale. Comme il s'agit d'un point M le test de convexité doit concerner le point M, il s'agit bienentendu du signe de E! (T designe bien $T_C \neq E_N + E_G$)

$$\overrightarrow{P} = M + (R_F + T)\overrightarrow{N} \qquad R_F > 0$$

Test Si $N \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} < 0$ (λ parametre variable)



En un angle de balayage, on peut choisir entre plusieurs options.

$N \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}$ et $N \frac{\partial^2 M}{\partial l^2}$ simultanément <0 ou trajet fictif oblique $\Delta\lambda = \Delta l$ (Signe variable de $\Delta\lambda$ et Δl)

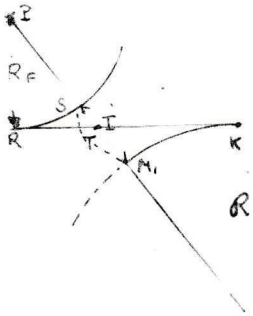
$$N \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} \Delta\lambda^2 + 2N \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \lambda} \Delta\lambda \Delta l + N \frac{\partial^2 M}{\partial l^2} \Delta l^2 < 0$$

CORRECTION de CONVEXITÉ
2e Test de CONVEXITÉ.



Si on fait abstraction de la correction précédente, le sillon laissé par la fraise sur le trajet M_1M_2, s'est bien engagé jusqu'à la surface S-T, mais le point M_2 a été lui aussi enlevé.

$P_1M_1 = R$ était compté en oblique et le sillon réel a recoupé la normale en M_2 en dessous de M_2



Etudions le phénomène de plus près sur un cercle, en tenant compte cette fois de la correction d'excès matière. Le sillon a une hauteur IM_1 au lieu de SM_1

$$\frac{IM_1}{IS+IM_1} = \frac{R_F}{R_F+R} = \frac{TK}{RT+TK} = \frac{M_1M_2}{P_1P_2}$$

On peut donc appliquer cette aménagement, au ~~sur~~ calculs de d'_1 et d'_2 de cette façon simplifiée (ci-dessous.)

$$d'_1 = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{N_1}$$

$$d'_2 = -\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{N_2}$$

Le reste comme auparavant ; Il nous reste à définir les cas où on applique cette modification, qui utilise $\overrightarrow{M_1M_2}$ au lieu de $\overrightarrow{P_1P_2}$.

La convexité est relative à M_1M_2 et non P_1P_2 qui peut avoir une nature différente.

On exprime que pour un rayon de fraise tout petit ε

$$|\overrightarrow{P'_1P'_2}| > |\overrightarrow{M_1M_2}|$$

soit $d(\overrightarrow{M_1M_2}^2) > 0$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \varepsilon\overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{M_1M_2}(-\varepsilon\overrightarrow{N_1}) > 0$$

2° Test de convexité	$\overrightarrow{M_1M_2}(\overrightarrow{N_2}-\overrightarrow{N_1}) > 0$ Soit $d'_2 + d'_1 < 0$

Le programme de calcul commencera par le calcul de δ_1 δ_2, et E_G qui utilise $\overrightarrow{M_1M_2}$

Le 2e test de convexité décidera alors si on doit charger $\overrightarrow{P_1P_2}$ à la place de $\overrightarrow{M_1M_2}$ dans la mémoire utilisée à cet effet. Pour les cas où les tests de convexité donne 0 ma préférence va ne rien changer de la théorie générale, c'est à dire calculer d_1 et d_2, de même que pour la correction d'excès matière ne pas porter R_F+T mais R_F

TEST DE VALIDITÉ – FOURCHETTE DE TOLÉRANCE.

Nous sommes en mesure de calculer l'écart total $E_N + E_G$; Quand doit on recommencer l'itération?

Cette question délicate ne peut être résolue par l'adoption d'une fourchette fixe. Ce calcul n'est justifiable que si l'on peut se croire en mesure de gagner 1 point au moins sur la courbe. or ceci dépend du nombre n, inconnu, de points qui restent à calculer sur la courbe.

S'il reste $\Delta\lambda$ à parcourir, dans le cas, usuel, ou l'écart est proportionnel à $d\lambda^2$ on peut écrire

$$n = \frac{\Delta\lambda}{d\lambda_0} \qquad d\lambda_1 \text{ est justifié s'il est plus grand que } \frac{\Delta\lambda}{n-1}.$$

$$\text{or } T_1(d\lambda_1) / T_0(d\lambda_0) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2$$

or T_1 doit rester inférieur à T_c.

$$\boxed{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 T_c < E_G + E_N < T_c}$$

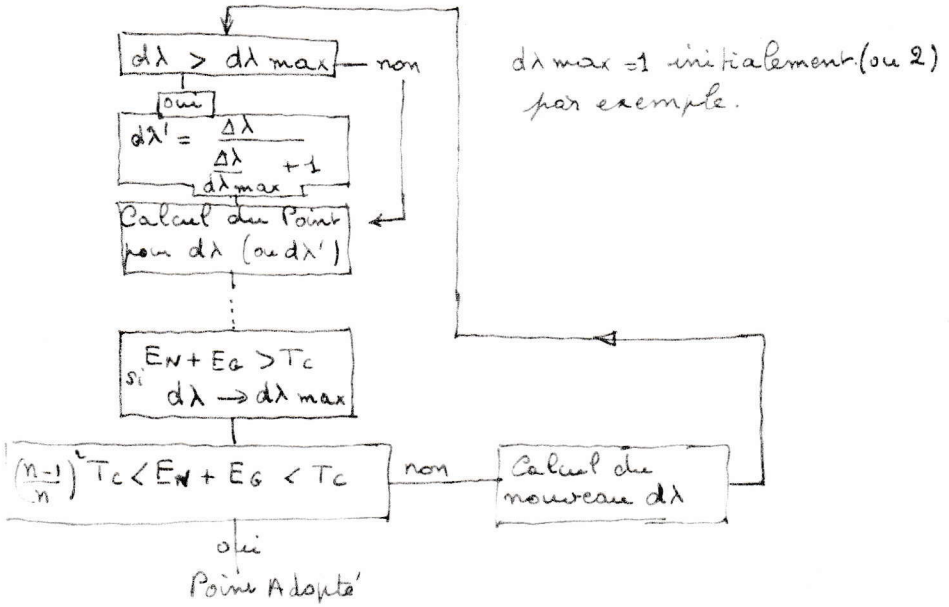
Critère de Validité

a) Si l'écart total $E_N + E_G$ dépasse la valeur T_c imposée, l'intervalle $d\lambda$ envisagé est rejeté ainsi que toute valeur supérieure. définitivement.

b) Si l'écart est dans la fourchette ci-dessus, on peut le conserver tel que.

On voit que si $n = 1$, la fourchette est intégrale $(0, T_c)$

On peut donc calculer un point, pour un pas $d\lambda$, déterminé par des considérations que nous verrons par la suite



dλ max = 1 initialement (ou 2) par exemple.

Ceci est assez sûr, mais en dehors de la garantie assurée par le a), on n'a aucune assurance contre le cas ou la tolérance n'est pas fonction croissante du $d\lambda$.

MODIF.:

Réajustement du pas $d\lambda$
Prevision du suivant.

On pourrait, dans un souci d'exactitude différentier les quantités $d_1\ d_2$, $\delta_1\ \delta_2$ par rapport à M_2

$$\begin{cases} d(\vec{N_1}.\vec{P_1P_2}) = \vec{N_1}.\vec{dP_2} = \vec{N_1}\left(\dfrac{\partial \vec{P_2}}{\partial\lambda}d\lambda\right) \\ d(\vec{N_2}.\vec{P_2P_1}) = d\vec{N_2}.\vec{P_1P_1} + \vec{N_2}.\vec{dP_2} = \vec{P_2P_1}.\left(\dfrac{\partial \vec{N_2}}{\partial\lambda}d\lambda\right) \end{cases}$$

Ceci, dans un souci de parfection, permet un réajustement de $d\lambda$ rapide de façon à avoir le nouvel $E_C + E_N$ en fonction du nouveau $d\lambda$

Il ne permet pas de prévoir le $d\lambda$ suivant.

En se reportant à la page 5, on trouvera des formules d'interpolation pour passer d'un arc $d\lambda$ à $p\,d\lambda$, que nous utiliserons.

On part d'un $d\lambda_n$ qui donne une Tolérance $E_C + E_N = T_n$

on suppose que $\dfrac{d\lambda_{n+1}}{d\lambda_n} = \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ avec $\dfrac{T_{n+1}}{T_n} = \dfrac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}$ or $T_{n+1} = T_C$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{T_C - T_n}{T_C + T_n}$$

$$\frac{d\lambda_{n+1}}{d\lambda_n} = \frac{2(T_C+T_n)+(T_C-T_n)}{2(T_C+T_n)-T_C+T_n} = \frac{3T_C+T_n}{T_C+3T_n}$$

en posant $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{9}\left[|x+y| + \dfrac{x^2 - xy + y^2}{|x+y| + \sqrt{x^2-xy+y^2}}\right]$

On a donc le calcul suivant.

$d_1\ d_2$, $\delta_1\ \delta_2$ donnés

On calcule $p_n = \dfrac{3T_C+T_n}{T_C+3T_n}$

puis $D_1\ D_2$, $\delta_1(p)\ \delta_2(p)$ relatifs à la valeur de p

$\varphi(D_1,D_2) + \left[\dfrac{\varphi(\delta_1 p, \delta_2 p)}{2R_F}\right]^2$ donne T_{n+1}

Si $\left|\dfrac{T_{n+1}-T_C}{T_C}\right| < 10^{-3}$ (?) on prend $p\,d\lambda_n = d\lambda_{n+1}$

Sinon on retrère en calculant p_{n+1}, à nouveau.

Pour prévoir le pas suivant lorsqu'un arc a été accepté on procède de même en prenant le pivot en extremité final du segment et $p=-1$

Ex. passer de M_0M_1 à M_1M_2

$d_0\ d_1$ $\quad d'_0\ d'_1$ $\quad d_0 = \vec{M_0M_1}.\vec{N_0}$ $\quad d_1 = \vec{M_1M_0}.\vec{N_1}$ $\quad (\text{ou } \vec{P_1P_0}.\vec{N_1})$

$d'_0 = \vec{M_1M_2}.\vec{N_1}$ $\quad d'_1 = \vec{M_2M_1}.\vec{N_2}$

Pivot M_1 d'_0 remplace D_0 d'_1, D_1 mais $d_0 d_1$ sont intervertis.

$$\begin{cases} d'_0 = p^2\left[d_1 + (1-p)(d_1-d_0)\right. = 3d_1 - 2d_0 \\ d'_1 = p^2\left[d_0 + 2(1-p)(d_1-d_0)\right. = 4d_1 - 3d_0 \end{cases} \quad \text{pour } p=-1$$

et on itère comme ci dessus

La seule objection que l'on puisse faire est évidemment, que le paramètre λ est ignoré puisque p est relatif à $P_1 P_2$ (ou $M_1 M_2$) M_1 et M_2 sont 2 points quelconques de la surface, quels que soient leurs parametres et on en déduit malgré tout $p d\lambda$.

A ceci, outre la simplicité, on objectera que ce procédé reste applicable au cas du balayage quelconque, tel que balayage connu à partir d'une projection horizontale. La dérivation par rapport à λ deviendrait pénible, et dans tous les cas on n'a pas d'autre procédé pour prévoir le pas de l'arc voisin.

QUANTIFICATION.

Pour eviter que le dernier secteur (ou passage) soit trop petit, il est bon de prévoir avant la fin des $d\lambda$ tel que $n = \frac{\Delta\lambda}{d\lambda}$ se rapproche de valeurs entières, donc par defaut.

Il faut donc essayer de majorer n pour diminuer $d\lambda$ de façon à repartir $\Delta\lambda$ en valeurs presqu'égales.

Un premier procédé consiste à prendre $\frac{\Delta\lambda}{d\lambda}$ arrondi par excès à l'entier superieur.

$$\begin{cases} d\lambda \text{ théorique (pour } E_G + E_N = T_C) \rightarrow n = \dfrac{\Delta\lambda}{d\lambda_{th}} \text{ arrondi par excès à } N \\ d\lambda \text{ pratique} = \dfrac{\Delta\lambda}{N} \end{cases}$$

On peut encore améliorer cette technique si on désigne par n, f la valeur de $\frac{\Delta\lambda}{d\lambda}$ n, partie entière f partie fractionnaire

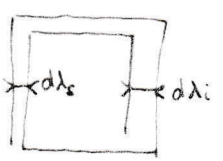
On prend $d\lambda$ pratique $= \dfrac{\Delta\lambda}{n, f + (1-f)^2}$ ou encore $\dfrac{\Delta\lambda}{n, f + \frac{(1-f)^2}{n}}$

Si $n \neq 0$

si $n = 0$ on prend evidemment $d\lambda = \Delta\lambda$

Ces formules majorent n, f surtout si f (et n pour la 2e) est petit, ce qui est normal, mais modifient peu le n, f si celui est légèrement inférieur à un entier.

ENTRE - PASSAGES.



Les mêmes formules s'appliquent pour un balayage zigzag, Pour un labyrinthe les $d\lambda_s$, $d\lambda_i$ sont très différents, il est bon d'en considérer la moyenne dès que l'on peut

$$d\lambda_m = \frac{1}{2}(d\lambda_s + d\lambda_i) \quad \text{pour evaluer } n, f \text{ et de}$$

corriger $d\lambda_s$ ou $d\lambda_i$ dans la proportion ci-dessus, sans cela on pourrait faire une erreur grossière.

exemple $d\lambda_s$ pratique $= \dfrac{n, f}{n, f + \frac{(1-f)^2}{n}} d\lambda_s$ théorique.

CONCLUSION.

En ce qui concerne l'écart arc, corde le 3° degré constitue la limite du possible, la dérivée étant du 2e degré. Au delà on devrait se contenter d'à peu près et de valeurs empiriques.

...

En ce qui concerne les courbes planes, les cames il y a donc tout intérêt à utiliser ces formules.
En ce qui concerne les cames la définition d'arcs par points et tangentes est d'autre part très utile pour de nombreuses autres raisons. Nous avons ici un moyen de fractionner ces arcs.

En ce qui concerne les surfaces, nous avons enfin les principes et démonstrations nécessaires. La question était suffisamment importante pour être traitée à fond. Ce d'autant plus que les "non-initiés" peuvent difficilement se rendre compte de toute la complexité du problème.
Cet exposé clarifie donc ce problème et permettra d'éviter de nombreuses embûches, qui jusqu'ici on n'avait pas traitées à fond.

Certes on peut prétendre faire mieux, prévoir plus de cas, mais ce serait sans aucun doute au prix d'une complication exagérée.