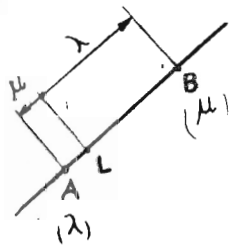
document n° 2

I/ - COURBES A PÔLES -

1° - GENERALITES - (Introduction aux courbes à pôles).

1.1. - Barycentre de deux points



Chercher le point du vecteur AB qui le divise dans le rapport de λ et μ

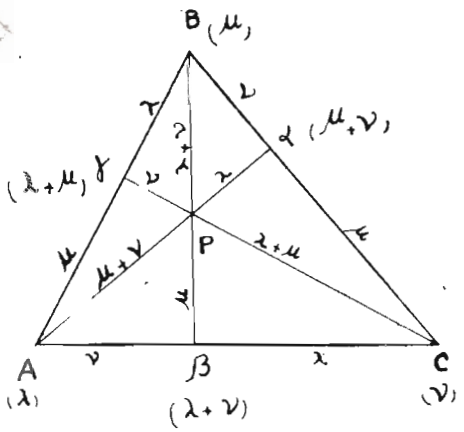
On peut écrire : $L = \vec{A} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}.\vec{AB}$ si $\mu = 0$ on est en A
si $\lambda = 0$ on a B

d'où $L = \frac{\lambda A + \mu A + \mu B - \mu A}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda A + \mu B}{\lambda+\mu}$ (1) car $\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}$

Formule qui permet de calculer le point L en allant de A vers B.

Le point L est le centre de gravité ou barycentre des deux points A (affecté d'une masse λ) et B (affecté d'une masse μ).

1.2. - Barycentre de trois points



Soient A, B, C, les trois points, affectés respectivement de masses λ, μ, ν

Les masses λ et μ peuvent être remplacées par une masse $(\lambda+\mu)$ concentrée au barycentre γ de A et B.

De même, les masses $\lambda+\mu$ et ν peuvent être remplacées par une masse $\lambda+\mu+\nu$ concentrée au barycentre P de γ et de C.

$P = \frac{\lambda A + \mu B + \nu C}{\lambda+\mu+\nu}$ (2) En effet, $\gamma = \frac{\lambda A + \mu B}{\lambda+\mu}$

et $P = \frac{(\lambda A + \mu B) + \nu C}{(\lambda+\mu)+\nu}$

La formule étant symétrique, elle est valable quel que soit l'ordre utilisé.

scellée le 29/7/1953

P.4147-1

°°°/°°°°

	NOM	DATE	VISA		NOM	DATE	VISA	VALABLE POUR

LANCÉ PAR NOTE N° REMPLACE N° DU ARRÊTÉ A LA MODIFICATION
MODIF.

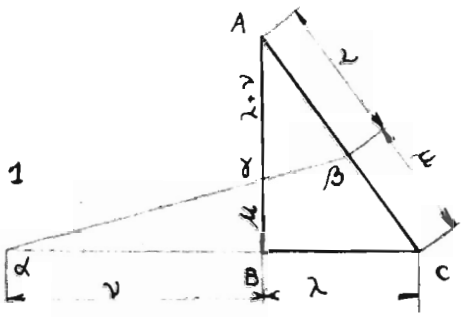
1.2.1. - Applications.

Cette formule permet de démontrer deux théorèmes.

1°) Les trois droites concourantes $A\alpha$, $B\beta$ et $C\gamma$ dans un triangle, coupent les trois côtés du triangle en 3 points, tels que :

$$\left|\frac{\overline{\alpha B}}{\alpha C}\right| \times \left|\frac{\overline{\beta C}}{\beta A}\right| \times \left|\frac{\overline{\gamma A}}{\gamma B}\right| = \left|-\frac{\nu}{\mu}\right| \times \left|-\frac{\lambda}{\nu}\right| \times \left|-\frac{\mu}{\lambda}\right| = -1 .$$

C'est le théorème de Jean de Céva



2°) Prenons comme triangle de base, le triangle $BC\beta$

$$\left(\frac{\overline{\alpha B}}{\alpha C}\right)\cdot\left(\frac{\overline{\beta C}}{\beta A}\right)\cdot\left(\frac{\overline{\gamma A}}{\gamma B}\right) = \left(\frac{\nu}{\lambda+\nu}\right)\cdot\left(\frac{-\mu}{\nu}\right)\cdot\left(\frac{\lambda+\nu}{\mu}\right) = +1$$

C'est le théorème de Ménélaus.

1.2.2. - Remarques.

1°) On a le droit de prendre des masses quelconques. En particulier, il est possible de les prendre de façon que leur somme soit égale à 1, à moins que l'on ne puisse faire autrement.
Les relations (1) et (2) deviendront :

$\lambda + \mu = 1$ $\qquad$ $\lambda + \mu + \nu = 1$ $\qquad$ c'est une hypothèse commode

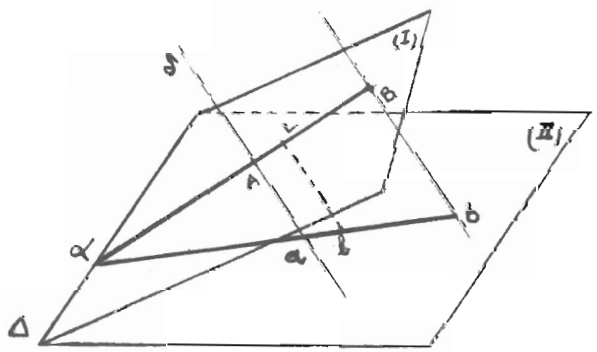
d'où $L = \lambda A + \mu B$ (1') et $P = \lambda A + \mu B + \nu C$ (2').

On dira mécaniquement que le point divise le vecteur AB dans le rapport de λ sur μ

2°) Tout ce qui précède est valable pour trois points dans l'espace.

1.3. Affinité

1.3.1. - Problème direct - Considérons un vecteur $\overrightarrow{AB}$, situé dans le plan (I) et un point L divisant $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport de λ à μ



Projetons ce vecteur sur le plan (II) par une projection parallèle à la direction δ (projection cylindrique). D'après le théorème de Thalès, la projection ab de AB est divisée également par le point L dans le rapport de λ à μ
Le passage de la figure ALB à la figure alb constitue une affinité : c'est ce qui pourrait résulter d'une projection cylindrique.

Les droites AB et ab se coupent sur l'arête Δ intersection des plans I et II .
On a donc : une droite fixe Δ, une direction fixe δ, un point A et son homologue a.

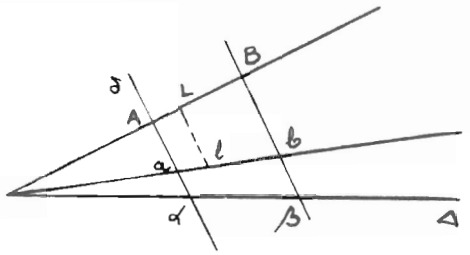
.../...

Si une droite AB coupe l'intersection Δ des deux plans, son homologue ab passera par cette intersection, ce qui nous permet d'obtenir le point b.

D'après Thalès: $\frac{\alpha a}{\alpha A} = \frac{\beta l}{\beta B}$

On vient de faire une affinité , et

Tout travail fait sur AB est valable sur ab.

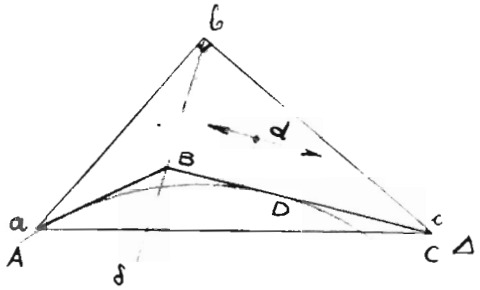


Remarques : 1°) Une affinité bien connue est le cercle donnant l'ellipse,

2°) L'affinité permettra de trouver les pôles d'un arc d'ellipse connaissant les pôles du cercle.

1.3.2. - Application.

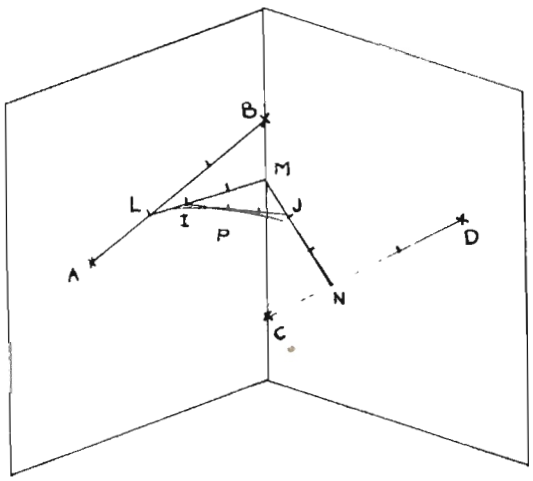
On se donne un triangle quelconque. Trouver une affinité qui ramène ce triangle à un triangle rectangle.



On prend un des côtés AC du triangle comme axe d'affinité et on déplace le sommet parallèlement à une droite δ quelconque jusqu'à ce que l'angle $\widehat{ABC} = 90°$ (intersection avec un cercle de diamètre AC).
Il existe plusieurs affinités : les sommets des triangles seraient homologues.
Si une courbe est Tge aux côtés AB et AC du triangle ABC et en un point D, on a la tangente à la courbe $// a \Delta$
Par ce point, il suffit de mener une parallèle à Bb et de diviser dans le même rapport pour obtenir une tangente parallèle à la tangente primitive, car la tangente ne coupe pas l'axe fixe Δ

1.4. Tangente et plan osculateur à la courbe

Considérons 3 points A, B et C et divisons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ dans le même rapport de λ à μ ; par les points L, M, N et répétons l'opération sur les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{MN}$ par les points I et J et sur le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ (par le point P)



$L = \lambda A + \mu B$

$M = \lambda B + \mu C$ relation valable quel que soit le degré de la courbe.

$I = \lambda L + \mu M = \lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C$

Dans le cas de 4 points A, B, C, D , ou deux plans se coupent suivant BC, étendons au vecteur $\overrightarrow{CD}$ la construction précédente.

Les points L, M, N sont dans un plan (π) qui contient IJ. Ce plan (π) coupe les deux autres plans respectivement suivant LM et MN.

Quand λ/μ varie, le point P décrit une courbe dont la tangente est IJ et le plan osculateur en P est le plan (π)

$L = \lambda A + \mu B$
$M = \lambda B + \mu C$
$N = \lambda C + \mu D$

$I = \lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C$
$J = \lambda^2 B + 2\lambda\mu C + \mu^2 D$

$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2\mu B + 3\lambda\mu^2 C + \mu^3 D$ (1)

La symétrie de la formule, entre les extrémités, montre que ce qui est valable en A l'est encore en D.

Supposons $\lambda = 1$ d'où $\mu = 0$ le point P vient en A.

$$dP = 3\left[\lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C\right] d\lambda + 3\left[\lambda^2 B + 2\lambda\mu C + \mu^2 D\right] d\mu$$

d'où $\frac{dP}{3} = I.d\lambda + J.d\mu$ le vecteur $\vec{dP}$ est donc la droite IJ et la variation de P se fait sur IJ.

Comme $\lambda + \mu = 1$ il suit $d\lambda + d\mu = 0$

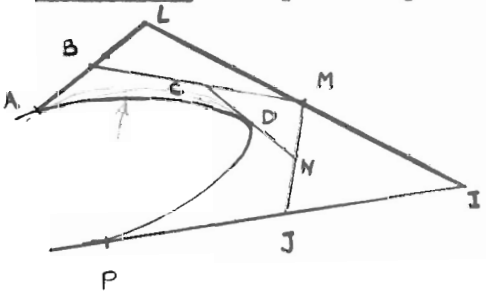
d'où $\frac{dP}{3} = (J-I)d\mu = \vec{IJ}.d\mu$ ce qui montre que IJ est une tangente, le point P étant déjà sur IJ.

En dérivant à nouveau, on trouverait que le point I varie suivant la droite LM et que le point J varie suivant la droite Mn, ce qui exprime que le plan LMN est le plan osculateur.

Les pôles de la courbe sont donc les intersections respectives des tangentes et des plans osculateurs.

Remarque 1 - Le point L peut être extérieur à AB, ce qui permet d'envisager des arcs plus grands.
Dans le cas de la figure $\lambda = -1$ $\mu = 2$

La construction reste valable, de plus, elle est réversible.



Remarque 2

$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2\mu B + 3\lambda\mu^2 C + \mu^3 D$ d'où en éliminant $\lambda = 1 - \mu$ il vient

$A(1 - 3\mu + 3\mu^2 - \mu^3)$
$+B(3\mu - 6\mu^2 + 3\mu^3)$
$+C(3\mu^2 - 3\mu^3)$
$+D(\mu^3)$

$\vec{P} = \vec{OA} - 3\mu.\vec{AB} + 3\mu^2(\vec{BC} - \vec{AB}) + \mu^3(\vec{CD} - 2\vec{BC} + \vec{AB})$

A	$\vec{AB}$			
B	$\vec{BC}$	$\vec{BC} - \vec{AB}$		
C	$\vec{CD}$	$\vec{CD} - \vec{BC}$	$\vec{CD} - 2\vec{BC} + \vec{AB}$	$\vec{DE} - 3\vec{CD} + 3\vec{AC} - \vec{AB}$
D	$\vec{DE}$	$\vec{DE} - \vec{CD}$	$\vec{DE} - 2\vec{CD} + \vec{BC}$	
E				

pour 4e degré : $E - 4D + 6C - 4B + A$ $\quad (D - 3C + 3B - A)$ $\quad (A - B - A - C - 2B + A)$

Remarque 3 - Comme $\mu = 1 - \lambda$ on peut écrire $P = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ (1')

avec
$a = A - 3B + 3C - D$
$b = 3(B - 2C + D)$
$c = 3(C + D)$
$d = D$

En effectuant les différences ligne par ligne jusqu'à ce que l'on obtienne plus qu'un seul terme, on peut trouver facilement les coefficients de la cubique

A			
B	$A - B$		
C	$B - C$	$A - 2B + C$	
D	$C - A$	$B - 2C + D$	$A - 3B + 3C - D$

Les derniers termes de chaque colonne sont les relations cherchées aux coefficients numériques près, lesquels constituent une ligne du triangle de Pascal.

P. 4147 - 4

.../....

Remarque 4 - Le plan osculateur en A est le plan (P) passant par les points A, B et C.

M étant un point courant du plan osculateur en A, l'équation de ce plan est $\begin{vmatrix} M-A \\ (dP)_A \\ (d^2P)_A \end{vmatrix}$

avec $dP = 3\lambda^2 A + 6\lambda\mu B + 3\mu^2 C - 3\lambda^2 B - 6\lambda\mu C - 3\mu^2 D$

$d^2P = 6\lambda A + 6\mu B - 12\lambda B - 12\mu C + 6\lambda C + 6\mu D$

En $A = \lambda = 1$ et $\mu = 0$ d'où $(dP)_A = 3(A-B)$ et $(d^2P)_A = 6(A-2B+C)$

Le plan osculateur en A a donc pour équation $\begin{Vmatrix} M-A \\ A-B \\ A-2B+C \end{Vmatrix} = 0$ (2)

Ce plan contient le point C, l'équation (2) étant vérifiée pour le point M en C, puisque :

$A-2B+C = (C-A) + 2(A-B)$ c.q.f.d.

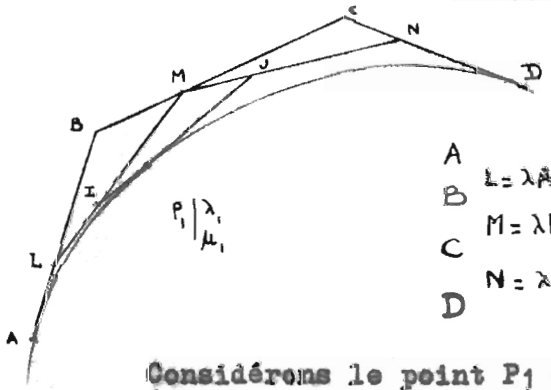
La symétrie de la formule, entre les extrémités A et D, montre que ce qui est valable au point A, est également valable au point D : le plan osculateur au point D est donc le plan passant par les points B, C et D.

Remarque 5 - Quand on a 2 points on a une droite
" 3 " une parabole
" 4 " une cubique
" 5 " une quartique

1.5.- Sous-Pôles d'une courbe

1.5.1.- Définition des sous-pôles.

Considérons une cubique des pôles A, B, C, D. Nous avons vu précédemment que la construction par la méthode des barycentres donnent les différents points L, M, N, I, J, P.



A
B $L = \lambda A + \mu B$ $I = \lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C$
C $M = \lambda B + \mu C$ $J = \lambda^2 B + 2\lambda\mu C + \mu^2 D$ $P = \lambda^3 A + 3\lambda^2\mu B + 3\lambda\mu^2 C + \mu^3 D$
D $N = \lambda C + \mu D$

Considérons le point P_1 de paramètres λ_1 et μ_1 (avec $\lambda_1 + \mu_1 = 1$) (λ_1 varie de 0 à 1 et μ_1 1 à 0, lorsque P va en D).

Cherchons les pôles de la cubique P_1 D. Cette courbe dérive de la cubique initiale AD par changement des paramètres.

En posant $\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda_1}$ il vient $\lambda = \lambda' \cdot \lambda_1$ et $\mu = 1 - \lambda = \lambda'\mu_1 + \mu'$ (et non pas $\frac{\mu}{\mu_1}$)

d'où $P = \lambda'^3\lambda_1^3 A + 3\lambda'^2\lambda_1^2(\lambda'\mu_1 + \mu')B + 3\lambda'\lambda_1(\lambda'\mu_1 + \mu')^2 C + (\lambda'\mu_1 + \mu')^3 D$

$P = \lambda'^3[\lambda_1^3 A + 3\lambda_1^2\mu_1 B + 3\lambda_1\mu_1^2 C + \mu_1^3 D]$
$+ 3\lambda'^2\mu'[\lambda_1^2 B + 2\lambda_1\mu_1 C + \mu_1^2 D]$
$+ 3\lambda'\mu'^2[\lambda_1 C + \mu_1 D]$
$+ \mu'^3 D$

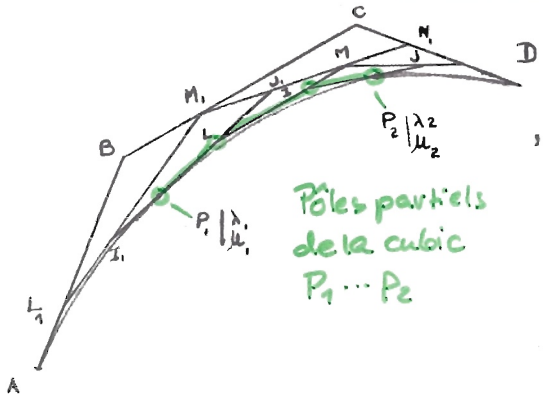
d'où $P = \lambda'^3 P_1 + 3\lambda'^2\mu' J_1 + 3\lambda'\mu'^2 N_1 + \mu'^3 D$

Les nouveaux pôles de la cubique partielle sont donc P1, J1, N1 et D. Les points J_1 et N_1 étant confondus avec les points J et N.

P. 4147 - 5

Remarque - On trouverait de même que les pôles de la cubique partielle AP_1 sont les points A, L_1, I_1, P_1, les points L_1 et I_1 étant confondus avec les points L et I. Ces nouveaux pôles sont appelés "pôles partiels" ou "sous-pôles".

1.5.2.- Pôles d'une section de courbe : cas général



Considérons une cubique AD et deux points de cette cubique P_1 et P_2, définis respectivement par leurs paramètres (λ_1, μ_1) et (λ_2, μ_2) et cherchons les pôles de la cubique partielle P_1P_2.

Prenons la cubique P_1D comme portion de la cubique AD et la cubique P_1P_2 comme portion de la cubique P_1D.

On sait que les pôles de la cubique P_1D sont les points P_1, J_1, N_1, D et que les pôles de la cubique P_1P_2 sont les points P_1, L, I, P_2.

1.5.2.1. - Calcul des pôles P1, J1, N1, D.

$$\begin{array}{ll} A & \\ B & L_1 = \lambda_1 A + \mu_1 B \\ & M_1 = \lambda_1 B + \mu_1 C \\ C & \\ & N_1 = \lambda_1 C + \mu_1 D \\ D & \end{array} \qquad \begin{array}{l} I_1 = \lambda_1^2 A + 2\lambda_1\mu_1 B + \mu_1^2 C \\ J_1 = \lambda_1^2 B + 2\lambda_1\mu_1 C + \mu_1^2 D \end{array} \qquad P_1 = \lambda_1^3 A + 3\lambda_1^2\mu_1 B + 3\lambda_1\mu_1^2 C + \mu_1^3 D$$

1.5.2.2. - Calcul des pôles P1, L, I, P2.

Le point P2 étant un point de paramètres λ_2, μ_2 de la cubique ABCD, est un point de paramètres (λ, μ) de la cubique P1, J1, N, D, avec $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ et $\mu = 1 - \lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}$ d'où :

$$\begin{array}{ll} P_1 & \\ J_1 & L = \lambda P_1 + \mu J_1 \\ & M = \lambda J_1 + \mu N_1 \\ N_1 & \\ & N = \lambda N_1 + \mu D \\ D & \end{array} \qquad \begin{array}{l} I = \lambda^2 P_1 + 2\lambda\mu J_1 + \mu^2 N_1 \\ J = \lambda J_1 + 2\lambda\mu N_1 + \mu^2 D \end{array} \qquad P_2 = \lambda^3 P_1 + 3\lambda^2\mu J_1 + 3\lambda\mu^2 N_1 + \mu^3 D$$

Les pôles de la cubique $P_1(\lambda_1, \mu_1)$ $P_2(\lambda_2, \mu_2)$ seront obtenus en calculant :

$$\text{en } \lambda_1 \begin{cases} D = D \\ N_1 = \lambda_1 C + \mu_1 D \\ J_1 = \lambda_1^2 B + 2\lambda_1\mu_1 C + \mu_1^2 D \\ P_1 = \lambda_1^3 A + 3\lambda_1^2\mu_1 B + 3\lambda_1\mu_1^2 C + \mu_1^3 D \end{cases} \qquad \text{en } \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \begin{cases} P_2 = P_1 \\ L = \lambda P_1 + \mu J_1 \\ I = \lambda^2 P_1 + 2\lambda\mu J_1 + \mu^2 N_1 \\ P_2 = \lambda^3 P_1 + 3\lambda^2\mu J_1 + 3\lambda\mu^2 N_1 + \mu^3 D \end{cases}$$

.../...

Calcul que l'on peut schématiser sous la forme :

en (λ_1, μ_1)	en (λ, μ)
Pôles → A B C D	P1 J1 N1 D
L1 M1 N1	L M N
I1 J1	I J
D	P2
	↑ Pôles partiels ou sous-pôles

1.5.2.3.- Cas d'une quartique

On a le schéma :

en (λ_1, μ_1)	en (λ, μ)
Pôles → A B C D E	P1 V1 K1 O1 E
L1 M1 N1 O1	L M N O
I1 J1 K1	I J K
U1 V1	U V
P1	P2
	↑ Pôles partiels ou sous-pôles

et l'on a :

en λ_1 :

$$\begin{cases} E = E \\ O_1 = \lambda_1 O + \mu_1 E \\ K_1 = \lambda_1^2 C + 2\lambda_1\mu_1 D + \mu_1^2 E \\ V_1 = \lambda_1^3 B + 3\lambda_1^2\mu_1 C + 3\lambda_1\mu_1^2 D + \mu_1^3 E \\ P_1 = \lambda_1^4 A + 4\lambda_1^3\mu_1 B + 6\lambda_1^2\mu_1^2 C + 4\lambda_1\mu_1^3 D + \mu_1^4 E \end{cases}$$

en $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$:

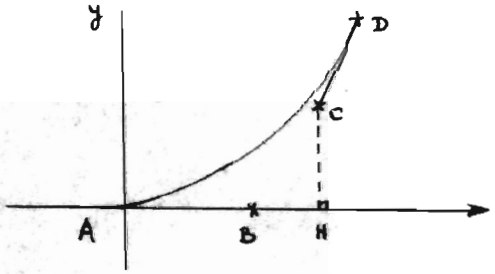
$$\begin{cases} P = P_1 \\ L = \lambda P_1 + \mu V_1 \\ I = \lambda^2 P_1 + 2\lambda\mu V_1 + \mu^2 K_1 \\ U = \lambda^3 P_1 + 3\lambda^2\mu V_1 + 3\lambda\mu^2 K_2 + \mu^3 O_1 \\ P_2 = \lambda^4 P_1 + 4\lambda^3\mu V_1 + 6\lambda^2\mu^2 K_2 + 3\lambda\mu^3 O_1 + \mu^4 D \end{cases}$$

Remarque 1 - Tout ce qui a été dit pour la cubique, s'étend intégralement dans le cas d'une courbe de degré supérieur.

Remarque 2 - Le procédé précédent permet de diviser un arc de courbe en 2, 3, ... n parties. Si le point L est extérieur à AB, il est possible d'envisager des arcs plus grands. La construction reste valable et est réversible.

1-6.- Rayon deCourbure

Prenons comme axe des abcisses la tangente à la cubique au point A.



$$x_P = \lambda^3 x_A + 3\lambda^2\mu x_B + 3\lambda\mu^2 x_C + \mu^3 x_D$$

$$y_P = \lambda^3 y_A + 3\lambda\mu y_B + 3\lambda\mu^2 y_C + \mu^3 y_D$$

Or : $x_A = y_A = y_B = 0$

d'où : $x_P = 3\lambda^2\mu x_B + 3\lambda\mu^2 x_C + \mu^3 x_D$

$$y_P = 3\lambda\mu^2 y_C + \mu^3 y_D$$

D'après la définition même, le rayon de courbure sera la limite de l'expression $\frac{x^2}{2y}$ lorsque le point P tend vers le point A .

P. 4147 - 7

.../...

Quand P tend vers A : $\lambda \to 1$, $\mu \to 0$ d'où $x_P \to 3\mu x_B + \ldots$ et $x_P^2 \to 9\mu^2 x_B^2 + \ldots$

$y_P \to 3\mu^2 y_C + \ldots$

d'où $\frac{X^2}{2Y} = \frac{9\mu^2 x_B^2 + \ldots}{6\mu^2 y_C + \ldots} = \frac{3 x_B^2 + \ldots}{2 y_C + \ldots} \to \frac{3\overline{AB}^2}{2\overline{CH}} = R_A$

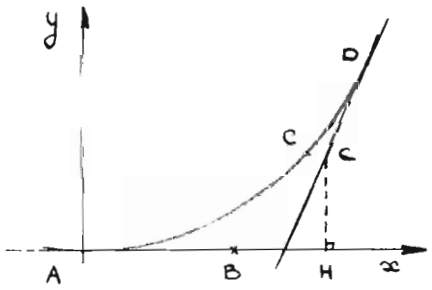
Remarques - 1°) Si n est le degré de la courbe, le rayon de courbure au point A de la courbe pourra s'écrire $R = \frac{n}{n-1} \times \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CH}}$

2°) Les sous-pôles permettent de trouver le rayon de courbure en n'importe quel point de la courbe. Mais cette méthode ne garantit rien sur la variation rapide du rayon de courbure.

1.7.- Recherche pratique des pôles

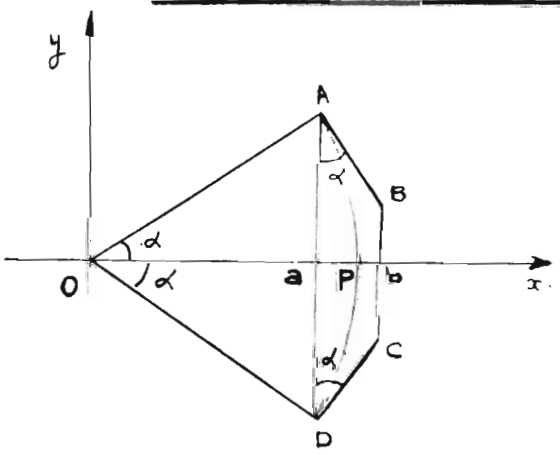
1.7.1.- Dans le cas d'une courbe de degré quelconque, le second pôle se trouve sur la tangente à l'extrémité A de la courbe, ce qui détermine une relation entre ses coordonnées. Il en est de même de l'avant-dernier pôle, qui est situé sur la tangente à la courbe au dernier pôle.

1.7.2. - Quand la courbe se termine par un élément de droite, le rayon de courbure est ∞, ce qui ne peut être que si CH = 0 (cf. 1.6). Le point C se trouve alors sur la droite AB.



Dans le cas d'un angle droit, le pôle C doit se trouver sur AB et le pôle B sur DC. Les points B et C sont donc confondus avec le point d'intersection des tangentes en A et D.

1.7.3. - Cas d'un arc de cercle d'angle au centre 2αX.



Par suite de la symétrie par rapport à Ox, on peut chercher une cubique symétrique par rapport à Ox.

Prenons le point P, de paramètres $\lambda = 1/2$, $\mu = \frac{1}{2}$

$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2\mu B + 3\lambda\mu^2 C + \mu^3 D$

$P = \frac{1}{8} A + \frac{3}{8} B + \frac{3}{8} C + \frac{1}{8} D$

et $x_P = \frac{a}{4} + \frac{3b}{4} = R$

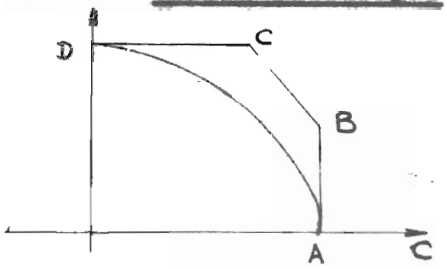
d'où $b = \frac{4R-a}{3} = \frac{4R-R\cos\alpha}{3} = \frac{R(4-\cos\alpha)}{4}$

$\overline{ab} = b-a = b-R\cos\alpha = \frac{4R(1-\cos\alpha)}{4}$

$\overline{AB} = \frac{\overline{ab}}{\sin\alpha} = \frac{4R}{3}\,\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = k \times R$

Remarque : si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (cas du quart de cercle) $\overline{AB} = 0{,}55228\ R$

1.7.4. - **Cas d'une ellipse** : il faut multiplier par le facteur d'affinité, d'où :



$\overline{AB} = 0{,}55228 \times \overline{OD}$

$\overline{CD} = 0{,}55228 \times \overline{OA}$

Remarques -

La connaissance des pôles suffit pour déterminer complètement une courbe.

La détermination d'une courbe en cubique se réduit à la recherche des 4 pôles, ce qui sera facile si les tangentes et les plans osculateurs aux deux points extrêmes sont connus.

Dans le cas de courbes planes, il faut chercher à placer les pôles B et C sur les tangentes aux extrémités A et D et les déplacer sur ces tangentes, de façon à approcher le plus possible la cubique de la courbe donnée.

Pratiquement, l'approche d'une courbe donnée est d'autant plus facile à faire avec précision que le degré de la courbe est élevé, par contre, l'augmentation du degré conduit à une déformation plus importante des courbes ; il s'ensuit des difficultés d'usinage. En ne dépassant pas le 4° degré, on concilie, pratiquement, la précision et la facilité d'usinage.

C'est une méthode de tatonnement qui sera utilisée pour définir un contour idéalisé assez proche du contour réel, dans le cas des études de surfaces.

2.I. La Cubique gauche

2.I.I. Formule générale

La cubique gauche peut être projetée suivant plusieurs directions . Selon le cas on obtiendra une boucle, un point de rebroussement, un point d'inflexion.

La formule générale de la cubique est :

$$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2\mu B + 3\lambda\mu^2 C + \mu^3 D$$

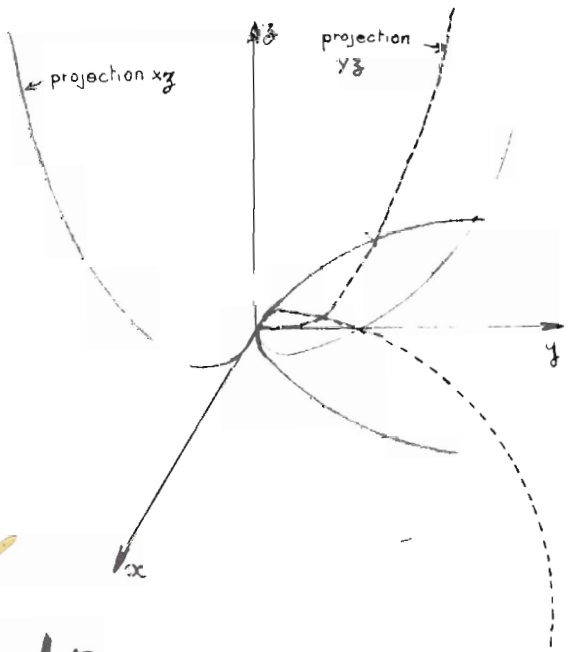
2.I.2. Passage des pôles aux coefficients

Quand on a les pôles d'une cubique, les coefficients des polynômes sont obtenus en faisant les différences:

2° degré 1 2 1
3° degré I 3 3 1 (partie triangulaire noire)
4° degré I 4 6 4 1(partie triangulaire rouge)

2.I.3. Forme des courbes

L'origine des axes peut toujours être prise en A, ce qui élimine les termes constants .



Le coefficient de μ^3 peut être choisi comme direction Oz :

$$\vec{CD} - 2\vec{BC} + \vec{AB} \Rightarrow Oz$$

Les coordonnées en x et y n'auront donc pas de termes en μ^3

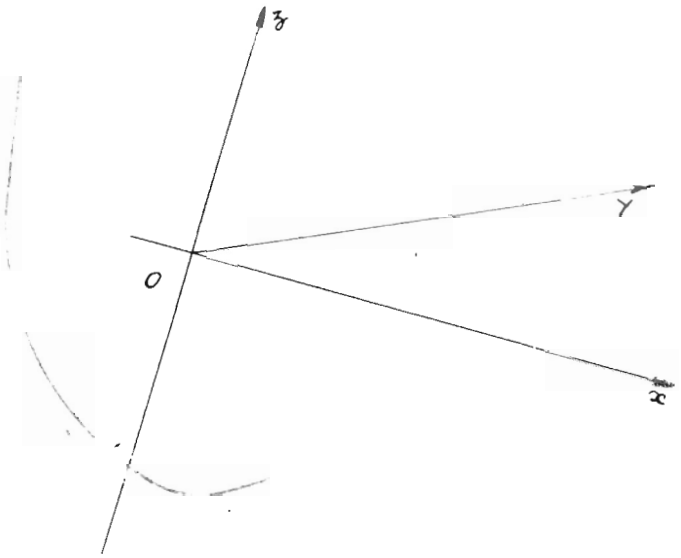
$\vec{BC}-\vec{AB}$ doit être supposé distinct de Oz, sinon on aurait une courbe plane .
et $\vec{AB}$, $\vec{BC}-\vec{AB}$, $(\vec{CD}-2\vec{BC}+\vec{AB}) \neq 0$ ce qui indique que les points A,B,C,D ne sont pas dans un même plan .
et par affinité, on peut toujours prendre $\vec{BC}-\vec{AB} = Oy$ et $\vec{AB} = ox$

Remarque : si l'on est en axes obliques, il est toujours possible de se ramener à l'axe Oz par une affinité

$x = a\mu$	que l'on peut ramener à	$x = \mu$	)	formes canoniques
$y = b\mu^2$	" " "	$y = \mu^2$	)	des courbes à des
$z = c\mu^3$	" " "	$z = \mu^3$	)	affinités près .

par une réduction d'ordonnée

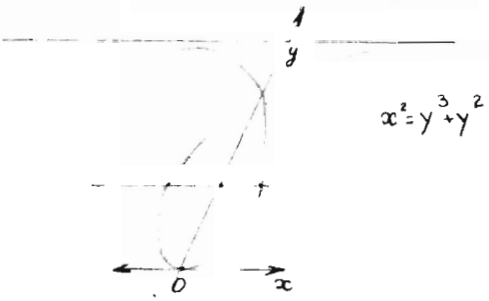
Projeté dans le plan xy $y = x^2$ c'est une parabole
la courbe est donc construite sur un cylindre parabolique , et Oy est un axe de symétrie, et les tangentes forment un cône $1, 2\mu, 3\mu^2$



2.2. Formes planes

2.2.I. Formes au 3° degré

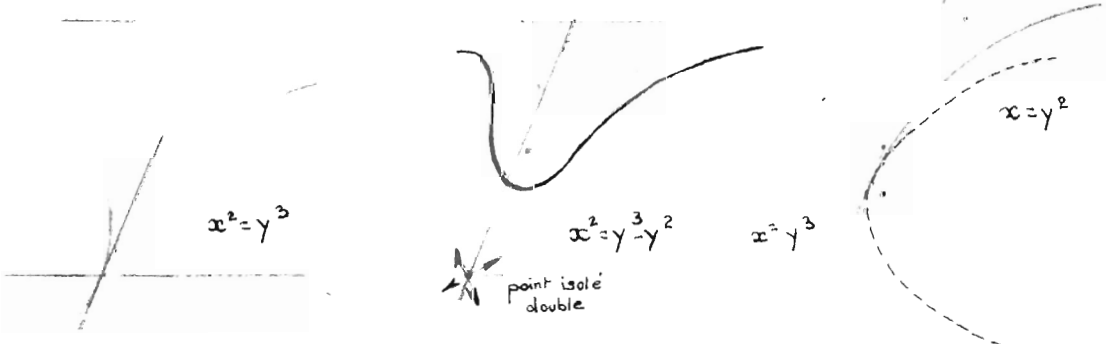
On s'arrangera toujours pour que le terme en λ^3 soit dirigé suivant Oy
Pour une valeur du paramètre, la valeur de la tangente est nulle .
Le point O correspondant à ce paramètre, sera pris comme origine, l'axe Ox étant la tangente de ce point.



Il y a un axe de symétrie oblique toujours possible , avec un point double par rapport à x = on a une courbe en boucle

La courbe : $x^2=y^3$ donne une seconde forme de cubique

La courbe : $x^2= y^3-y^2$ donne une troisième forme de cubique, avec un point isolé double à l'origine.



La direction de symétrie oblique est l'axe à l'infini

Remarque : Aux trois formes de cubiques correspondent des pôles très différents .

Dans la pratique, penser à utiliser des répartitions normales, en évitant les pôles de bras de levier trop grand . Les meilleurs pôles sont ceux qui divisent en 3 (3° degré) ou en 4 (4° degré)

P. 4147 - 11

2.2.2. Exemple de forme obtenue au 4° degré (équerre)

Deux hypothèses possibles.

1° Faire le plus grand méplat possible vers A et E

2° Chercher une courbe deux fois tangente sur chaque axe .

Prenons la seconde hypothèse

courbe en $\lambda^4 A_+ \ldots = 0$

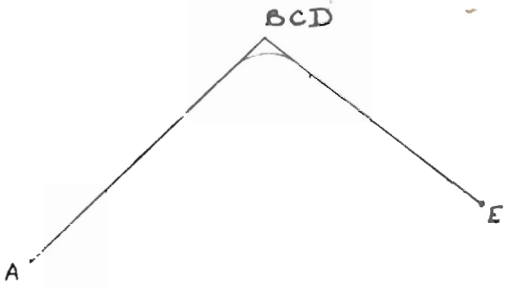
$y = \mu^2(\mu-\mu_0)^2 \times K$

$\left.\begin{matrix}\text{pour } \mu=0 \\ \text{pour } \mu=\mu_0\end{matrix}\right\} \rightarrow y=0$ au 2e d°

pour $\mu = 0{,}6$ $\quad 1 = K \times \overline{0{,}6}^2 \times 1$ (pour $\mu=1$ on veut $y=1$) d'où K

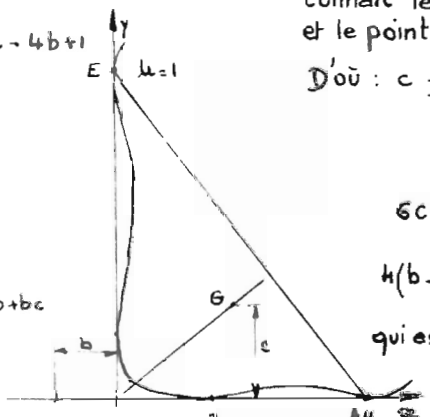
et $y = \frac{\mu^2}{\lambda^2}(\mu-\mu_0)^2$

et on identifie les termes de même degré



A	1				
		b-1			
B	b		c-2b+1		
		c-b		-3c+3b-1	
C	c		b-2c		
		-c		6c-4b+1	
D	o		3c-2b		
		o			
E	o				

A	o				
		o			
B	o		c		
		c		b-3c	
C	c		b-2c		1-4b+6c
		b-c		1-3b+3c	
D	b		1-2b-3c		
		1-b			
E	1				



$\begin{cases} y = 6c\mu^2 + 4(b-3c)\mu^3 + (1-4b+6c)\mu^4 \\ y = \frac{\mu_0^2}{\lambda_0^2}\mu^2 - \frac{2\mu_0}{\lambda_0^2}\mu_3 + \frac{1}{\lambda_0^2}\mu^4 \end{cases}$ → vient

de l'équation générale, dans laquelle on connaît les coordonnées des pôles A et E et le point B est sur Ox (tgte en A)

D'où : $c = \frac{\mu_0^2}{6\lambda_0^2}$ et $b = -\frac{\mu_0}{2\lambda_0}$

$6c = \frac{\mu_0^2}{\lambda_0^2}$ et $1-4b+3c = \frac{1}{\lambda_0^2}$

$4(b-3c) = -\frac{2\mu_0}{\lambda_0^2} \rightarrow \mu_0^2 + \lambda\mu_0 - \mu_0 = 0$

qui est une identité, or $\mu_0^2 + \lambda\mu_0 = \mu_0$

μ_0 peut donc être quelconque.

Application : $\lambda_0 = 0{,}6$ $\quad \mu_0 = 0{,}4$

$y = \frac{\mu^2}{\overline{0{,}6}^2}(\mu-0{,}4)^2 \rightarrow y = \left[\frac{\mu(\mu-0{,}4)}{0{,}6}\right]^2$

minimum pour $\mu = 0{,}5$ → $y = \left[\frac{0{,}5}{0{,}6} \times 0{,}1\right]^2 < 0{,}01$

maximum pour $\mu = 0{,}2$ → $y = \left[\frac{0{,}2 \times 0{,}2}{0{,}6}\right]^2 = \frac{1}{225} < 0{,}01$ précision certaine 1%

Remarque : Les courbes du 4° degré faisant des courbes très tendues, il est inutile d'aller chercher le 5° degré .

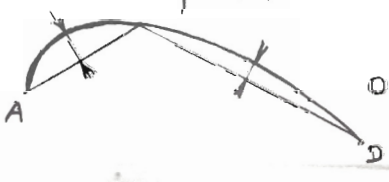
2.3. Le Cubique plane

2.3.I. Généralités

A et D sont deux des pôles .

Le point de paramètre 1/2 sera placé de façon que les flèches des deux arcs soient égales (position logique) mais cette méthode n'est pas finée .

L'affinité nous fournit un meilleur outil. Considérons un arc de parabole.

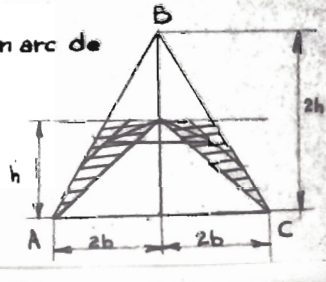


Surface ABC = 8 bh

Surface ALI = Surface IMC = bh

On peut dire : $S^{1/3}_{ABC} = S^{1/3}_{ALI} + S^{1/3}_{IMC}$

$\sqrt[3]{8} = 1+1$



P.4147 -12

La somme des surfaces est indépendante du nombre de points du découpage . C'est une propriété affine (réduction dans une certaine direction, il en est de même pour les surfaces) .

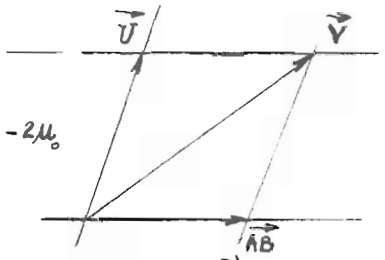
Cette méthode convient aux surfaces convexes (surfaces toujours de même signe) et elle est valable pour toute courbe continue et à dérivée continue . S'il y a variation de signe , on tombe sur un point d'inflexion, attention !

Si les deux aires sont égales, on aura le point de paramètre 1/2 compris entre les cordes égales (médiatrices) et le point donnant des flèches égales

Conclusion On prendra le point compris entre le point I/2 correspondant à des flèches égales et le point 1/2 correspondant à l'égalité des aires sous-tendues .

2.3.5.2. Détermination des formes des courbes en cubique

A
B $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$
C $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$
D $\overrightarrow{CD}$



$A + 3\mu\overrightarrow{AB} + 3\mu^2(\underbrace{\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}}_{\vec{U}}) + \mu^3(\underbrace{\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}}_{\vec{V}})$ $\quad (\overrightarrow{AB}+2\mu_0\vec{U})\wedge V = 0$

Considérons le point μ_0 et les points symétriques $(\mu_0+\delta)$ et $(\mu_0-\delta)$

$M = A + 3\mu_0\overrightarrow{AB} + 3(\mu_0+\delta)\vec{U} + (\mu_0^3 + 3\mu_0\delta^2)\vec{V} + \Delta$

$\Delta = -\left[3\delta.\overrightarrow{AB} + 6\mu_0\delta\vec{U} + (3\mu_0^2\delta+\delta^3)\vec{V}\right]$ [⊗ signe moins sur cette ligne]. On peut donc avoir $M+\Delta$ et $M-\Delta$

Si $\vec{\Delta}$ // a une direction fixe, on retrouve bien l'axe de symétrie oblique

$\vec{\Delta} = \pm\delta\left[3\overrightarrow{AB} + 6\mu_0\vec{U} + 3(\mu_0^2+\delta^2)\vec{V}\right] = 3\delta\left[\overrightarrow{AB} + 2\mu_0\vec{U} + (\mu_0^2+\delta^2)\vec{V}\right]$

On peut prendre le vecteur $\overrightarrow{AB} + 2\mu_0\vec{U} \wedge V = 0$ pour éliminer le terme du premier degré en μ_0, qui perturbe la symétrie d'où une équation en μ_0

si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{U}$ sont distincts, cette opération est toujours possible et μ_0 existe, à condition que $\vec{V} \neq 0$
si $\vec{V} = 0$, on est ramené à la parabole ou à la droite
si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{U} \neq 0$ et non proportionnels, on est ramené au premier cas : l'axe de symétrie oblique sera Ox et l'on va changer l'origine A_0 que l'on placera au sommet ; μ_0 étant connu , on aura A_0 .

$A_0 = 3\delta^2\vec{U_0} + 0 \pm \delta(K+\delta^2)\vec{V}$

Pour $\delta = 0$ on a A_0 et U_0 sera l'axe des y

L'équation réduite sera $\begin{cases} x = \delta^3 + K\delta \\ y = \delta^2 \end{cases}$ si δ^3 n'existant pas, on a la parabole $K > 0$ avec δ^3 on s'éloigne de la parabole et on a la boucle $K < 0$

Si $K = 0$ on a la courbe à rebroussement

3.22 Exemple : $y = x^3$

λy on veut écrire $\begin{cases} x = \mu(\lambda+\mu)^2 \\ y = \mu^3(A) \end{cases}$

D'où les pôles 1 0 0 0
D C B A

$y = x^3$

A B C D
0 0 0 1
0 0 1
0 1
1



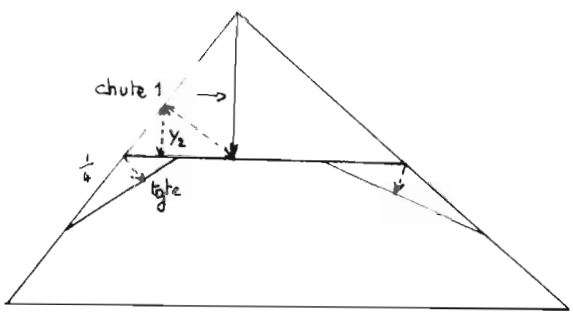
courbe du 3e ordre

0
0 0
0 0 0 1
0 0 1 1
0 1 1
1 1
2 1 1 1 — puissance de 2
4 2 2 1
8 4 2
12 4 2 — puissance de 3
18 6 3
27 9
36 9 3 1 — puissance de 4
48 12 4
64 16

Pour le 4e ordre, on ajoute 1 étage à la pyramide

0
0 0
0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 1
0 1 1
1 1
2 2 1 1
4 4 2 2 1 — puissance de 2
8 8 4
16 8
24 4
36 12 6 2 1 — puissance de 3
54 18 9 3
81 27

$y \quad \frac{y'}{4!} \quad \frac{y''}{12!} \quad \frac{y'''}{24!} \quad y''''$



Si $\overrightarrow{AB} = o$ et $\overrightarrow{V} = o$ on retrouve le cas précédent
Si $\overrightarrow{U} = o$ il est impossible de changer la direction de $\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{V}$ on retrouve le premier cas
$\overrightarrow{AB}$ non $// \overrightarrow{V}$: il n'existe pas de valeur ramenant $\overrightarrow{AB}$ dans la direction de $\overrightarrow{V}$, il n'y a donc plus d'axe de symétrie oblique .

En général, les axes de coordonnées sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{V}$

Cas de $\begin{matrix} x = \mu^3 \\ y = \mu \end{matrix}$ on trouve bien $x = y^3$: il existe un centre de symétrie .

L'équation de la cubique est ramenée au point double en faisant $\delta^3 + K\delta = o$ (1 racine imaginaire)

lorsque $K > o$
lorsque $K < o$

$\delta(\delta^2 + K) = o$ $\qquad \delta = o$

$\delta^2 + K = o$

P.4147 - 15

.../...

3/ COURBES A POLES - COMPLEMENTS

3.I.- Augmentation de degré d'une courbe

On connaît la courbe de degré n et on veut la transformer en courbe du degré $(n+1)$

Pour passer de la parabole à la cubique, il suffit de mettre les pôles au I/3 sur la tangente ..

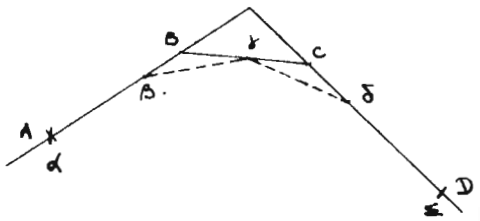
Passage de la cubique à la quartique :

cubique → $P = \lambda^3 A + 3\lambda^2\mu B + 3\lambda\mu^2 C + \mu^3 D$ multiplions par $(\lambda+\mu) = 1$

termes en λ $\quad \lambda^4 A + 3\lambda^3\mu B + 3\lambda^2\mu^2 C + \lambda\mu^3 D$

termes en μ $\quad \lambda^3\mu A + 3\lambda^2\mu^2 B + 3\lambda\mu^3 C + \mu^4 D$

$$\lambda^4\alpha + 4\lambda^3\mu\beta + 6\lambda^2\mu^2\gamma + 4\lambda\mu^3\delta + \mu^4\varepsilon$$



d'où en identifiant

$$\alpha = A$$

$$\beta = \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}A$$

$$\gamma = \frac{B+C}{2}$$

$$\delta = \frac{3}{4}C + \frac{1}{4}D$$

$$\varepsilon = D$$

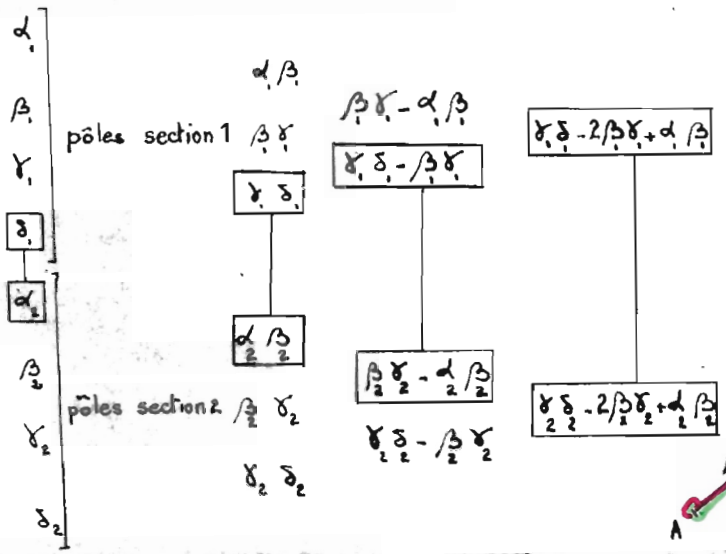
A,B,C,D = pôles de la cubique

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ = pôles de la quartique

ce qui permet de travailler sur γ par exemple

3.2.- Calcul par récurrence des cubiques

3.2.I. Sous pôles On peut retrouver très rapidement des arcs d'une cubique, dès que l'on a les pôles d'une section



Pour l'arc voisin α_2 et δ sont le même point Les variations de paramètres sont égales, on peut donc prendre le point à la moitié, c'est-à-dire

$\overrightarrow{\alpha_2\beta_2} = \overrightarrow{\gamma_1\beta_1}$



On identifie les différences deuxièmes

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \overrightarrow{\gamma_1\delta_1} - \overrightarrow{\beta_1\gamma_1} = \overrightarrow{\gamma_1\delta_1} - \overrightarrow{\gamma_1\beta_1} = \overrightarrow{M\delta_1} + \overrightarrow{\gamma_1\delta_1} = \overrightarrow{M\delta_1} \\ \overrightarrow{\beta_2\gamma_2} - \overrightarrow{\alpha_2\beta_2} &= \overrightarrow{\beta_2\gamma_2} + \overrightarrow{\beta_2\alpha_2} = \overrightarrow{M\beta_2} + \overrightarrow{\beta_2\alpha_2} = \overrightarrow{M\alpha_2} \end{aligned}\right\} \overrightarrow{M\delta_1} = \overrightarrow{M\alpha_2}$$

Identifions les différences troisièmes

$$\overrightarrow{\gamma_1\delta_1} - 2\overrightarrow{\beta_1\gamma_1} + \overrightarrow{\alpha_1\beta_1} = \overrightarrow{\gamma_1\delta_1} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{\alpha_2\beta_2}$$

$$-\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{MB}$$

?.4147 -16

.../...

$\overrightarrow{\gamma_2\delta_2} - 2\overrightarrow{\beta_2\gamma_2} + \overrightarrow{\alpha_2\beta_2} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{\alpha_2\beta_2}$ $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{CM}$

On a donc une méthode de récurrence pour calculer une cubique (6 additions par coordonnée). Pour le 4° ordre, il y aurait IO additions par coordonnée .

Méthode longue, mais qui donne tous les sous-pôles et les tangentes .

P. 4147. 17

2/ - SURFACES A POLES

2.I.- Définition générale

Le déplacement d'une courbe engendre une surface . Mais, comme il y a une ∞ de façon à faire ce déplacement, cette définition est vague .

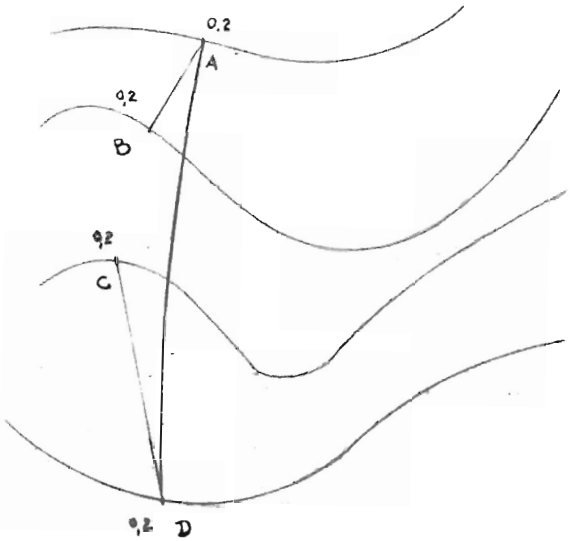
Il y a une équivalence entre les lignes de coodonnées d'un plan et les lignes paramètriques d'une surface à pôles .

Toute surface à pôles peut être considérée comme engendrée par une courbe à pôles dont les pôles se déplacent, à paramètres constants, le long d'un certain nombre de courbes à pôles données (≠de celle qui se déplace)

La multiplication symbolique permet d'unifier le degré de ces courbes; mais, dans certains cas, ce n'est pas une panacée : par exemple une droite peut être engendrée par 4 pôles alignés et le balayage équidistant n'existe que si les pôles sont au I/3 ou aux 2/3 ....

Deux grands cas particuliers :
1° Autant de pôles sur toutes les courbes de déplacement = surfaces rectangulaires .

2°Nombre de pôles diminuant d'un chaque fois et aboutissant obligatoirement à un = surfaces triangulaires .



2 2/ - SURFACES RECTANGULAIRES A POLES

2.2.I. Généralités

Une surface à pôles peut être définie par une courbe à pôles ABCD, dont le pôle A se déplace avec différentes valeurs du paramètre, sur une courbe à pôles .

Il en est de même de pôles B,C ou D, avec les mêmes valeurs de paramètres, sur les courbes à pôles .

$B_1\ B_2 - B_5$, $C_1\ C_2 - C_5$ et $D_1, D_2 - D_5$

On sait qu'un point de ABCD est donné par :

$P = \lambda^3[A] + 3\lambda^2\mu[B] + 3\lambda\mu^2[C] + \mu^3[D]$ Vektoriell $\quad \lambda + \mu = 1$

On sait que : $\quad l + m = 1$

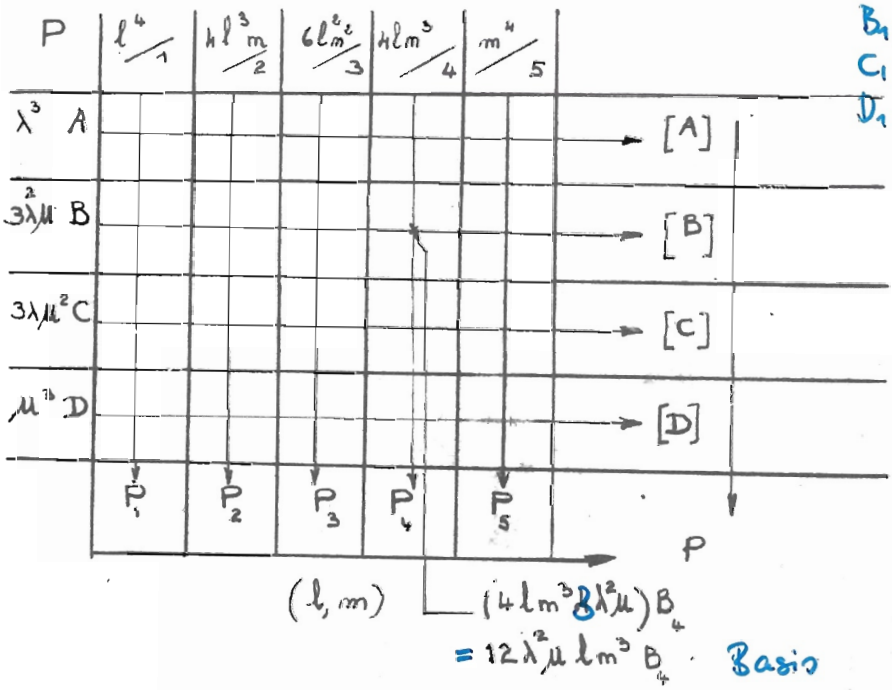
$[A] = [l^4 A_1 + 4 l m^3 A_2 + 6 l^2 m^2 A_3 + 4 l m^3 A_4 + m^4 A_5]$

$[B] = [l^4 B_1 + 4 l^3 m B_2 + 6 l^2 m^2 B_3 + 4 l m^3 B_4 + m^4 B_5]$

Le calcul devient inextricable, d'où l'intérêt d'une représentation symbolique .

On va disposer les pôles en surface :

$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$
$B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5$
$C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ C_5$
$D_1\ D_2\ D_3\ D_4\ D_5$



[A] est calculé à partir de pôles fixes, on peut donc calculer un point de cette surface à pôles, sur chacune des lignes .

Considérons les colonnes : on a l'air d'avoir encore des pôles et on obtiendra P, en prenant les paramètres l et m

On a donc deux façons de définir le point P de la surface Le point P est l'intersection de deux courbes à pôles . Il y a donc réversibilité entre les paramètres λ et l

On peut donc trouver deux tangentes en ce point P, l'une en $\lambda\mu$, l'autre en l, m) lesquelles déterminent un plan tangent .

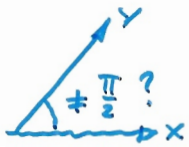
4147.19

La courbe à pôles est un réseau de points, la surface à à pôles est un réseau de courbes .

Dans les surfaces à pôles, il existe des points singuliers (points côniques, points d'une arête de rebroussement, pointe anguleux , etc) mais en nombre limité .

Lorsqu'on a un point d'une surface à pôles, on peut toujours prendre un système d'axes pour y voir plus clairement, ou prendre, par exemple, la tangente comme axe des x et l'on fera des changements d'axes successifs pour rendre la surface à pôles plus simple .

Si x est suffisamment petit, x^2 sera négligeable, on calculera ensuite z en fonction de x et y . La tangente à l'une des courbes est prise comme axe des x et la tangente à l'autre comme axe des y , si ces tangentes sont distinctes si x est petit, z le sera encore plus (puisqu'on est sur la tangente = $z = \frac{X^2}{2R_1} + XY + \frac{Y^2}{2R_2} + \dots$



Comme il n'y a pas de termes du premier degré, la notion de plan tangent apparaît .

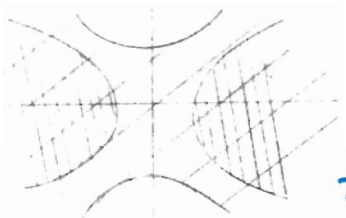
Si $z = \varepsilon$, les termes du second degré sont très petits, et l'on a l'équation d'une cônique ayant des axes de symétrie.

(XY) , par un changement d'axes approprié, peut être supprimé . On retrouve l'indicatrice d'Euler : une section parallèle au plan tangent et très voisine nous donne une cônique : ellipse : R_1 , $R_2 > 0$

hyperbole : R_1 , $R_2 < 0$

parabole : $R_2 = \infty$ (2 droites parallèles)

Les trois cas se rencontrent sur toutes les surfaces : les premières sont des surfaces convexes ou concaves .



Dupin's Indicatrix !

On a deux rayons de courbure. Avec une pièce régulière , on a un grand rayon de courbure et un petit (car la flèche est la même . Pour l'hyperbole, il y a un rayon de courbure imaginaire (pour - ε et pour la parabole il y a un rayon de courbure ∞

L'indicatrice d'Euler permet de constater le maximum et le minimum de courbure sur une surface .

Si besoin est, la courbure en n'importe quel point de la surface peut être calculé .

$x = \lambda \cos \alpha$

$y = \lambda \sin \alpha$

$z = \lambda^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{2R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{2R_2} \right]$

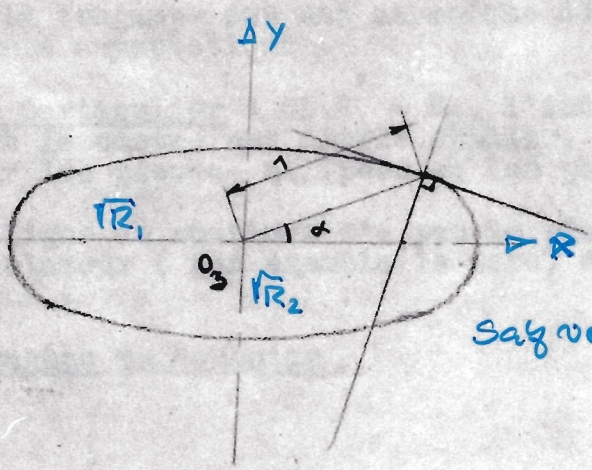
z est la flèche $\frac{2z}{\lambda^2} = \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2}$

R varie de R_1 à R_2 avec α

C'est valable pour une section droite (qui contient la normale)

.../...

14147 - 20



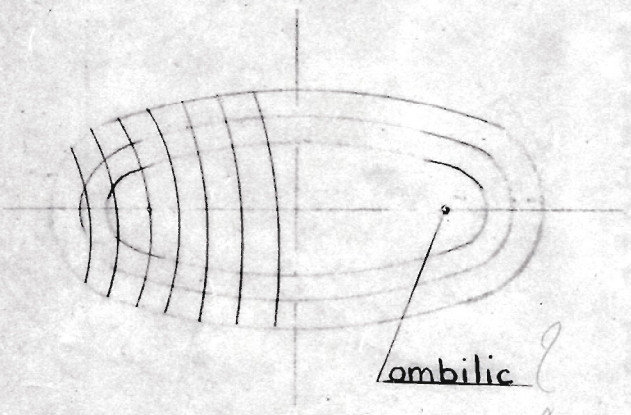
Salg von Euler

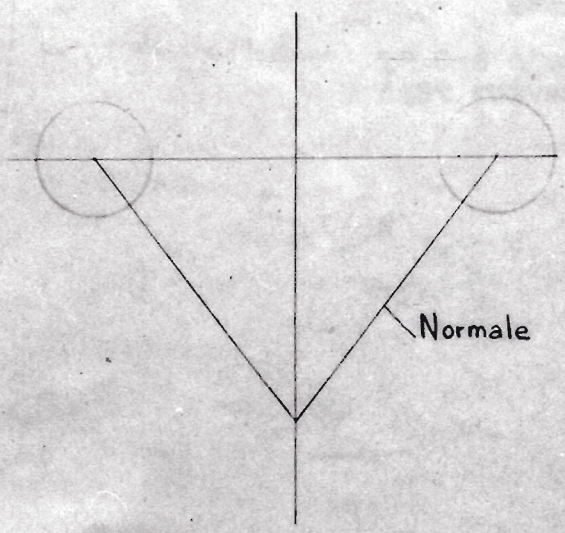
$x = \lambda \cos\alpha$

$y = \lambda \sin\alpha$.

$z = \lambda^2 \left[\frac{\cos^2\alpha}{2R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{2R_2} \right]$

z est la flèche $\frac{2z}{\lambda^2} = \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}$.





P. 4147 - 21

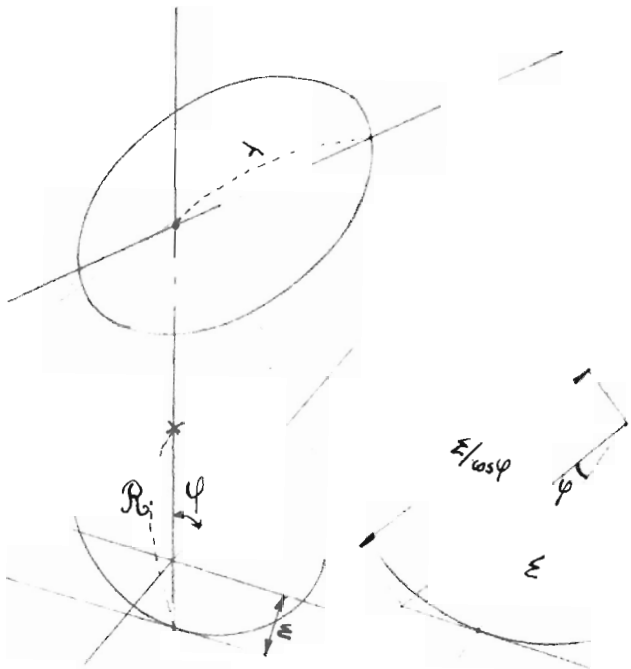
On est à un extremum de courbure lorsque la normale admet une enveloppe (par exemple sommet de l'ellipse) La tangente est alors un axe de l'indicatrice .

Si la tengante est une asymptote de l'indicatrice, on a une courbe asymptotique .

Cas particulier : Si $R_1 = R_2$, l'indicatrice est un cercle, dont le centre est appelé ombilic, c'est une espèce de foyer pour les pseudo- ellipses et les pseudo-hyperboles.

La ligne de courbure n'a pas le plan normal comme plan osculateur (par exemple le tore) sinon ce serait une géodésique .

2.2.2.- Théorème de Meusnier



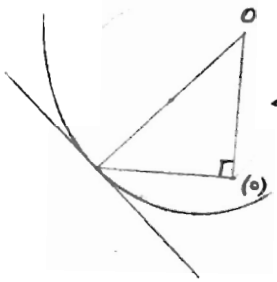
Ce théorème concerne les sections obliques .
R = rayon de la section normale
$\mathcal{R} = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon}$ L'intersection est le même point, par contre, la flèche change or on a :

$$\frac{\varepsilon}{\cos\varphi} \rightarrow r\varphi = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon}\cos\varphi = \mathcal{R}\cos\varphi$$

En projection oblique, les centres de courbure s'obtiennent par simple projection .

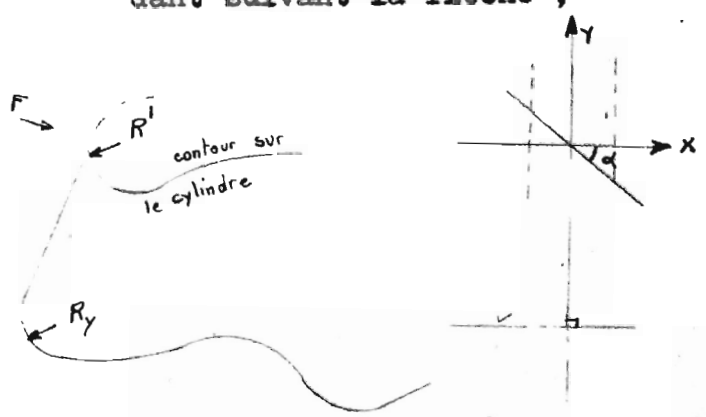
Le lieu des centres de courbure, qui pivotent autour d'un point, est un cercle .

Le centre de courbure O étant connu, les centres de courbure obliques (o) sont connus par projection



Applications .

1° Cas d'un cylindre : En regardant suivant la flèche ,



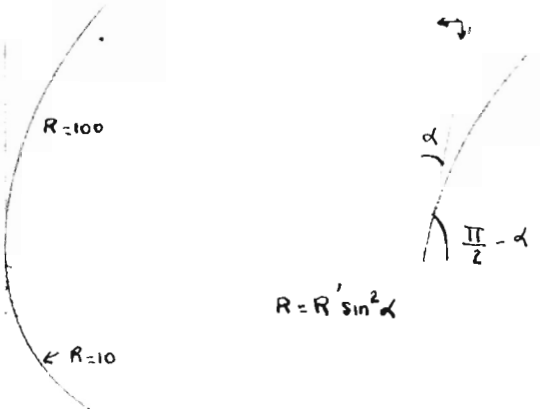
le rayon dans l'espace est R', on a donc un rayon $\propto$

L'indicatrice sera : $z = \frac{X^2}{2R}$ et $\frac{1}{R'} = \frac{\cos\alpha}{R}$

.../...

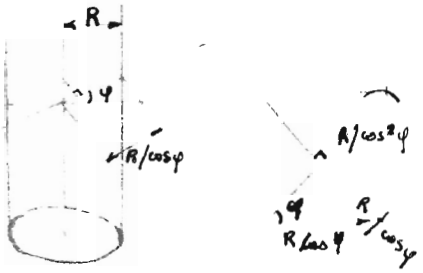
2°) Intersection de deux cylindres ayant un plan tangent commun.

Doppelpunkt



Dans une troisième vue, la courbe a un certain rayon de courbure, faisant des angles α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ par rapport aux cylindres projétants .

$R = R' \cos^2 \alpha$ d'où $tg^2 \alpha = \frac{1}{2}$
$R = R' \sin^2 \alpha$



3°) Cylindre de révolution coupé par un plan oblique
R = rayon de la section normale et le grand axe est $\frac{R}{\cos\varphi}$
Avec le théorème de Meusnier on a : $R' = R \sin\varphi$ d'où $\frac{R\cos\varphi}{R} = \frac{R/\cos\varphi}{R/\cos^2\varphi}$
d'où des droites perpendiculaires

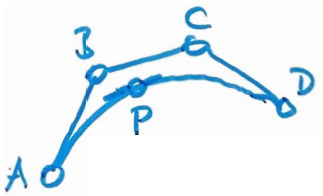
Remarque : Quand on est de profil , le théorème de Meusnier n'est utile que pour voir ce qui se passe .

2.2.3. - Tangentes et Normales

P	ℓ^4 /1	$4\ell^3 m$ /2	$6\ell^2 m^2$ /3	$4\ell m^3$ /4	m^4 /5	tg $\vec{IJ}$
$\lambda^3 A$						$A \lambda^2$
$3\lambda^2 \mu B$						$B 2\lambda\mu + \mu^2$
$3\lambda\mu^2 C$						$C \mu^2 + 2\lambda\mu$
$\mu^3 D$						$D + \mu^2$
	P	P_2	P_3	P_4	P_5	P

Reprenons la notation symbolique.

La tangente à la surface s'obtient comme s'il s'agissait de la tangente sur la courbe ABCD



$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2 \mu B + 3\lambda\mu^2 C + \mu^3 D$ d'où $\frac{dP}{3} = \frac{(\lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C)\, d\lambda}{I} + \frac{(\lambda^2 B + 2\lambda\mu C + \mu^2 D)\, d\mu}{J}$ $\vec{IJ}\, d\mu$

D'où, en écriture vectorielle :

$$\vec{IJ} = \lambda^2 \vec{AB} + 2\lambda\mu \vec{BC} + \mu^2 \vec{CD}$$

(μ) est le paramètre de travail utilisé, car pour $\mu = 0$, on a le point A

On aurait de même une tangente $\vec{ij}$ en dérivant par rapport à ℓ et m et en supprimant le degré 4

La tangente s'obtient à partir de la même grille, mais avec de nouveaux coefficients :

$tg\ \vec{IJ}$	ℓ^4 /1	$4\ell^3 m$ /2	$6\ell^2 m^2$ /3	$4\ell m^3$ /4	m^4 /5
$(-\lambda^2)A$					
$(-2\mu\lambda+\lambda^2)B$					
$(2\lambda\mu-\mu^2)C$					
$\mu^2 D$					

Recherche aberrante

Tangente au λ-livre

On aurait pu travailler en colonnes, au lieu de lignes, en dérivant par rapport à ℓ et m et les coefficients en ℓ et m changeraient seuls :

$tg\ \vec{ij}$	ℓ^3 /1	$-3\ell^2 m+\ell^3$ /2	$-3\ell m+3\ell^2 m$ /3	$-m^3+3\ell^2 m$ /4	m^3 /5
$\lambda^3 A$					
$3\lambda^2\mu\ B$					
$3\lambda\mu^2 C$					
$\mu^3 D$					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5

La normale est donnée par le produit vectoriel des tangentes : $\vec{IJ} \wedge \vec{ij} = N \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} \right.$

Remarque : Si N est petit, il y a un danger pour la forme de la surface

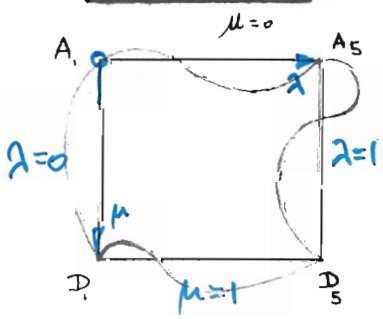
La tangente horizontale à une section $\frac{x}{y}$ est $N \left| \begin{matrix} -\beta \\ \alpha \end{matrix} \right.$

La machine Bull permet de trouver la normale en tout point de la surface

Il y a 4 courbes contour $\lambda=0$ $\mu=0$ $\ell=0$ $m=0$

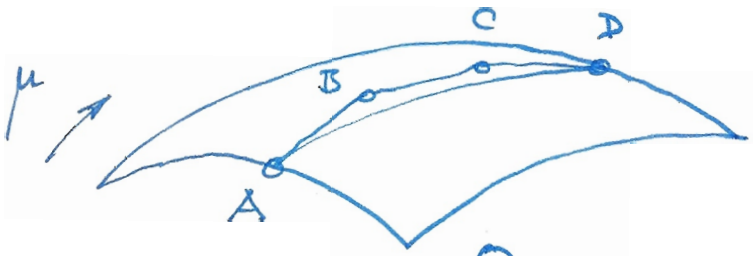
La détermination des pôles de contour se ramène à la recherche des pôles des courbes qui limitent la surface, ce que l'on sait faire .

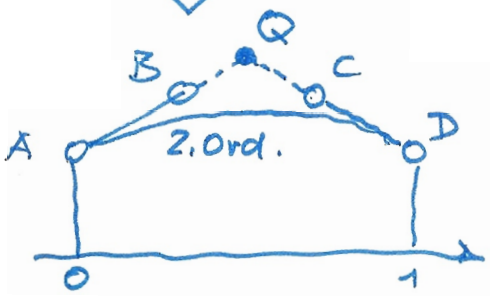
Cas particuliers:



On n'a que la ligne des A, c'est-à-dire la courbe du contour.
A_1 , A_5 , D_1 et D_5 appartiennent obligatoirement à la surface .
$A_1 D_1$ et $A_5 D_5$ seront des cubiques et 2 côtés du contour .
$A_1 A_5$ se déforme jusqu'à la position limite $D_1 D_5$

.../...





$3B - A = Q = 3C - D$

a) Le plan tangent aux angles est naturellement inscrit dans les pôles .
b) Il est possible de trouver la tangente au point $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, d'où la tangente à la courbe $A_1 A_5$

En déterminant le point de paramètre 0,5 sur $B_1 B_5$ d'où la tangente à la courbe de paramètre 0,5 (en joignant les points de paramètre 0,5 des courbes A et B) qui, avec la tangente au contour, détermine le plan tangent .

2.2.8 - Pôles Centraux . Les pôles du contour sont connus, comme on vient de le voir dans ce qui précède .

Il reste à déterminer les pôles centraux ou pôles situés à l'intérieur de la représentation symbolique adoptée .

Pour les courbes convexes, les pôles se trouvent à l'extérieur de la courbe pour les surfaces convexes , les pôles seront encore plus à l'extérieur .

Cherchons la surface de degré minimum s'appuyant sur le contour (méthode par abaissement de degré) ce qui donne un aspect plus régulier à la surface .

2.2.8.1°.-Cas d'une surface 4x4 (surface en cubique)

A_1
$B_1 - A_1$
$C_1 - 2B_1 + A_1$
$D_1 - 3C_1 + 3B_1 - A_1$

B_1
$C_1 - B_1$
$D_1 - 2C_1 + B_1$

C_1
$D_1 - C_1$

D_1

1 μ μ^2 μ^3

On va chercher à annuler le coefficient de μ^3, en chassant

$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2\mu B + 3\lambda\mu^2 C + \mu^3 D$, $\lambda = 1 - \mu$

$A(1 - 3\mu + 3\mu^2 - \mu^3)$
$+ B(+ 3\mu - 6\mu^2 + 3\mu^3)$
$+ C(+ 3\mu^2 - 3\mu^3)$
$+ D(+ \mu^3)$

	$\ell^3/1$	$3\ell^2 m/2$	$3\ell m^2/3$	$m^3/4$
$\lambda^3 A$	x	x	x	x
$3\lambda^2\mu B$	x	?	?	x
$3\lambda\mu^2 C$	x	?	?	x
μ^3 D	x	x	x	x

λ chassé : Coeff. de μ^3 ↓ — ℓ chassé : Coeff. de m^3 →

	-1 (1)	+3 (2)	-3 (3)	+1 (4)
-1	+1	-3	+3	-1
+3	-3	+9	+9	+3
-3	+3	-9	+9	-3
+1	-1	+3	-3	+1

D'où l'expression symbolique de $\mu^3 = 0$
soit $A_1 - 3A_2 + 3A_4 - A_4 - 3B_1 + \cdots = 0$
ou $\frac{D}{1} \frac{C}{-3} \frac{B}{+3} \frac{A}{-1} = 0$
première relation .

Comme il y a 4 pôles centraux, il nous faut 3 autres relations .

On va s'attaquer aux termes en μ^2
soit $\frac{D}{0} \frac{C}{1} \frac{B}{-2} \frac{A}{1} = 0$

ce qui nous donnera 2 équations par suite de la symétrie existantes entre A et D, de même entre B et C

mais on peut additionner les deux grilles d'où
Si ces deux grilles sont annulées, le terme en μ^3 sera nul également .

$\mu^2 = 0$ / m^2

+1	
-2	
+1	
0	

0	
+1	
-2	
+1	

p. 29

.../...

2.2.4. - Expression de la surface à pôles au moyen de coefficients

La surface étant définie comme engendrée par deux familles de courbes glissant l'une sur l'autre, $P = f(\lambda, \ell)$ si l'on fixe l'un des paramètres λ ou ℓ, on décrit une courbe de la surface.

Dans le cas des cubiques:

$$P = \begin{vmatrix} a_1 + b_1\mu + c_1\mu^2 + d_1\mu^3 \\ + (a_2 + b_2\mu + c_2\mu^2 + d_2\mu^3)\ell \\ + (a_3 + b_3\mu + c_3\mu^2 + d_3\mu^3)\ell^2 \\ + (a_4 + b_4\mu + c_4\mu^2 + d_4\mu^3)\ell^3 \end{vmatrix} \quad (I) = P(\mu, \ell) \; ?$$

$P = \sum_i \sum_k a_{i,k} \mu^i \ell^k$

Dans le cas de cubiques et de quartiques.

$$P = \begin{vmatrix} a_1 + b_1\mu + c_1\mu^2 + d_1\mu^3 + e_1\mu^4 \\ + (a_2 + b_2\mu + c_2\mu^2 + d_2\mu^3 + e_2\mu^4)\ell \\ + (a_3 + b_3\mu + c_3\mu^2 + d_3\mu^3 + e_3\mu^4)\ell^2 \\ + (a_4 + b_4\mu + c_4\mu^2 + d_4\mu^3 + e_4\mu^4)\ell^3 \end{vmatrix} \quad (I')$$

Dans le cas de quartiques:

$$P = \begin{vmatrix} a_1 + b_1\mu + c_1\mu^2 + d_1\mu^3 + e_1\mu^4 \\ + (a_2 + b_2\mu + c_2\mu^2 + d_2\mu^3 + e_2\mu^4)\ell \\ + (a_3 + b_3\mu + c_3\mu^2 + d_3\mu^3 + e_3\mu^4)\ell^2 \\ + (a_4 + b_4\mu + c_4\mu^2 + d_4\mu^3 + e_4\mu^4)\ell^3 \\ + (a_5 + b_5\mu + c_5\mu^2 + d_5\mu^3 + e_5\mu^4)\ell^4 \end{vmatrix} \quad (I'')$$

2.2.5. - Expression de la surface au moyen des pôles

On peut écrire les équations des courbes à paramètres constants en fonction de leurs pôles, $P = P(\mu, \ell)$

Dans le cas de cubiques

$$P = \begin{vmatrix} \left[D_4\mu^3 + 3C_4\mu^2(1-\mu) + 3B_4\mu(1-\mu)^2 + (1-\mu)^3 A_4\right]\ell^3 \\ + \left[D_3\mu^3 + 3C_3\mu^2(1-\mu) + 3B_3\mu(1-\mu)^2 + A_3(1-\mu)^3\right]\ell^2(1-\ell)\,3 \\ + \left[D_2\mu^3 + 3C_2\mu^2(1-\mu) + 3B_2\mu(1-\mu)^2 + A_2(1-\mu)^3\right]\ell(1-\ell)^2\,3 \\ + \left[D_1\mu^3 + 3C_1\mu^2(1-\mu) + 3B_1\mu(1-\mu)^2 + A_1(1-\mu)^3\right](1-\ell)^3 \end{vmatrix} \quad (II)$$

$P = \sum_i \sum_k b_{i,k} B_i^n(\mu) B_k^m(\ell)$

Dans le cas de cubiques et de quartiques.

$$(II') \quad P = \begin{vmatrix} \left[E_4\mu^4 + 4D_4\mu^3(1-\mu) + 6C_4\mu^2(1-\mu)^2 + 4B_4\mu(1-\mu)^3 + A_4(1-\mu)^4\right]\ell^3 \\ + \left[E_3\mu^4 + 4D_3\mu^3(1-\mu) + 6C_3\mu(1-\mu)^2 + 4B_3\mu(1-\mu)^3 + A_3(1-\mu)^4\right]\ell^2 \\ + \left[E_2\mu^4 + 4D_2\mu^3(1-\mu) + 6C_2\mu^2(1-\mu)^2 + 4B_2\mu(1-\mu)^3 + A_2(1-\mu)^4\right]\ell \\ + \left[E_1\mu^4 + 4D_1\mu^3(1-\mu) + 6C_1\mu(1-\mu)^2 + 4B_1\mu(1-\mu)^3 + A_1(1-\mu)^4\right] \end{vmatrix}$$

Dans le cas de quartiques

$$(II'') \quad P = \begin{vmatrix} \left[E_5\mu^4 + 4D_5\mu^3(1-\mu) + 6C_5\mu^2(1-\mu)^2 + 4B_5\mu(1-\mu)^3 + A_5(1-\mu)^4\right]\ell^4 \cdot 1 \\ + \left[E_4\mu^4 + 4D_4\mu^3(1-\mu) + 6C_4\mu^2(1-\mu)^2 + 4B_4\mu(1-\mu)^3 + A_4(1-\mu)^4\right]\ell^3(1-\ell) \cdot 4 \\ + \left[E_3\mu^4 + 4D_3\mu^3(1-\mu) + 6C_3\mu^2(1-\mu)^2 + 4B_3\mu(1-\mu)^3 + A_3(1-\mu)^4\right]\ell^2(1-\ell)^2 \cdot 6 \\ + \left[E_2\mu^4 + 4D_2\mu^3(1-\mu) + 6C_2\mu^2(1-\mu)^2 + 4B_2\mu(1-\mu)^3 + A_2(1-\mu)^4\right]\ell(1-\ell)^3 \cdot 4 \\ + \left[E_1\mu^4 + 4D_1\mu^3(1-\mu) + 6C_1\mu^2(1-\mu)^2 + 4B_1\mu(1-\mu)^3 + A_1(1-\mu)^4\right]\ell(1-\ell)^4 \cdot 1 \end{vmatrix}$$

2.2.6. – Représentation symbolique des surfaces

Par extension de la notion de courbe à pôles, les pôles de la surface seront par exemple

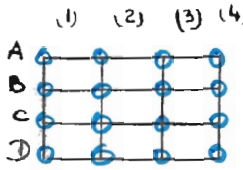
biquabique →

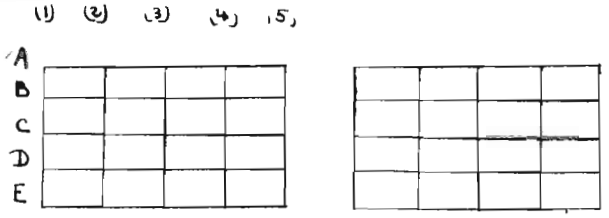
$E_4\ D_4\ C_4\ B_4\ A_4$
$E_3\ D_3\ C_3\ B_3\ A_3$
$E_2\ D_2\ C_2\ B_2\ A_2$
$E_1\ D_1\ C_1\ B_1\ A_1$

pour (11)

On représentera la surface par un quadrillage dont chaque carré symbolisera les pôles

cas de cubiques





cas de quartique

cas de cubiques et quartiques

2.2.7. – Expressions des coefficients en fonction des pôles

2.2.7.1 – Cas d'une surface engendrée par des cubiques en μ et l

Dans une cubique :

$$P = D\mu^3 + 3C\mu^2(1-\mu) + 3B\mu(1-\mu)^2 + A(1-\mu)^3 = D[\mu^3 \quad]$$
$$+ C[-3\mu^3 + 3\mu^2 \quad]$$
$$+ B[3\mu^3 - 6\mu^2 + 3\mu \quad]$$
$$+ A[-\mu^3 + \mu^2 - 3\mu + 1 \quad]$$

Les coefficients des différentes puissances de μ sont :

	D	C	B	A
en μ^3	1	-3	3	-1
" μ^2	0	3	-6	3
" μ	0	0	3	-3
terme C^t	0	0	0	1

en [3]

[x3]

D	C	B	A
1	-3	3	-1
0	1	-2	1
0	0	1	-1
0	0	0	1

Le coefficient de μ^3 est = $d = D - 3C + 3B - A$
" " μ^2 est : $c = 3[C - 2B + A]$
" " μ est : $b = 3[B - A]$
" " 1 est : $a = A$

De même par rapport au paramètre l

D'où pour la surface :

	1	-3	+3	1
+1	+1	-3	+3	+1
-3	-3	9	-9	-3
+3	+3	-9	9	+3
1	1	-3	+3	+1

[3]

[x3]

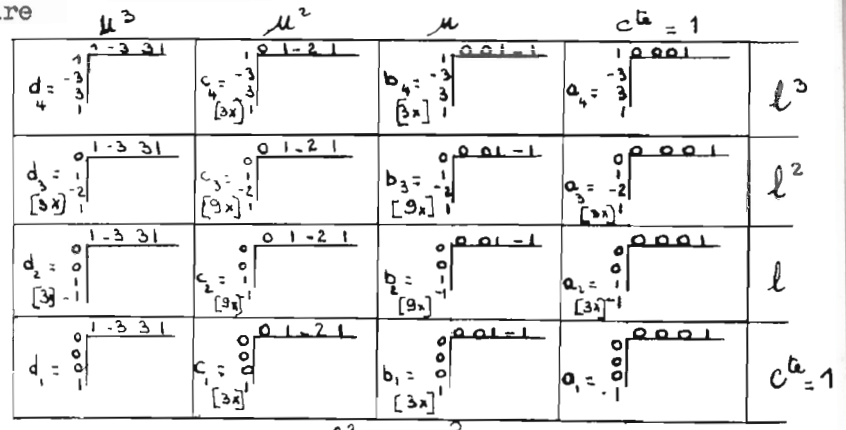
	(4)	(3)	(2)	(1)
l^3	1	-3	3	-1
l^2	0	1	-2	1
l	0	0	1	-1
C^{te}	1	0	0	1

Les 4 pôles au centre, sont appelés pôles centraux.

Pour simplifier on écrit :

	1	-3	+3	1
1				
-3				
+3				
1				

Avec cette notation, les différents coefficients peuvent s'écrire



Besser mit Matrizenmultiplikation

Par exemple, le terme en μl^2 est b^2 à la rencontre de la colonne μ et de la ligne l^2

$$b^2 = 9 \times \begin{array}{c|cccc} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ -2 & & & & \\ 1 & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & D & C & B & A \\ (4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (3) & 0 & 0 & 1 & -1 \\ (2) & 0 & 0 & -2 & 2 \\ (1) & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \times 9 = 9\left(B_3 - 2B_2 + B_1 - A_3 + 2A_2 - A_1\right)$$

2-2-7-2 – <u>Cas d'une surface engendrée par des cubiques en μ et de quartiques en l</u>

Les coefficients se déterminent de la même façon que précédemment

Par exemple, le coefficient du terme en $\mu^4 l^3$ sera donné par :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & & & & & \\ -3 & & & & & \\ 3 & & & & & \\ -1 & & & & & \end{array} \qquad \begin{aligned} &\left(E_4 - 4D_4 + 6C_4 - 4B_4 + A_4\right) \\ &3\left(E_3 - 4D_3 + 6C_3 - 4B_3 + A_3\right) \\ =\ &+3\left(E_2 - 4D_2 + 6C_2 - 4B_2 + A_2\right) \\ &+\left(E_1 - 4D_1 + 6C_1 - 4B_1 + A_1\right) \end{aligned}$$

2-2-7-3 – <u>Cas d'une surface engendrée par des quartiques en μ et en l</u>

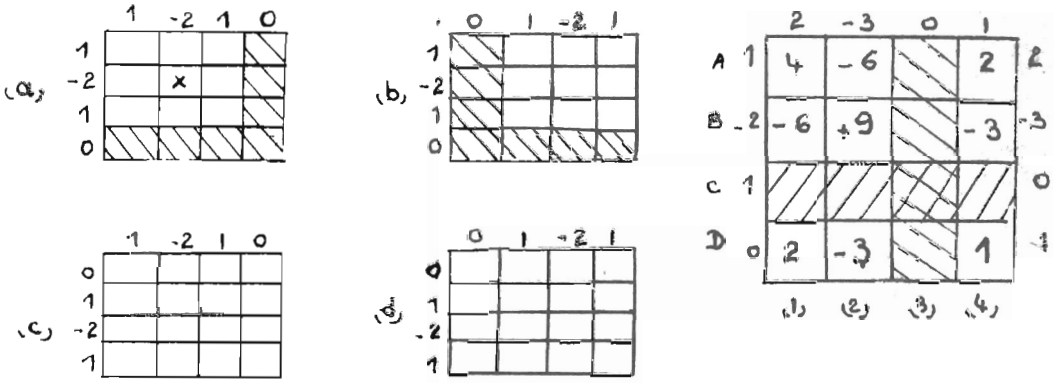
Le coefficient du terme en $\mu^3 l^2$ sera donné par :

$$24 \times \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ -3 & & & & & \\ 3 & & & & & \\ -1 & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & (5) & (4) & (3) & (2) & (1) \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ C & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ B & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ A & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} = 24 \times \qquad C_4 = 24\left[D_3 - 2D_2 + D_1 - 3C_3 + 6C_2 - 3C_1 + 3B_3 - 6B_2 + 3B_1 + A_3 - 2A_2 + A_1\right]$$

L'avantage de l'écriture symbolique est évident quand on veut calculer un pôle inte médiaire μ et B_2

On a vu précédemment que les sustèmes (a),(b), (c), et (d) sont équivalents, ils sont toujours symétriques par rapport à deux axes rectangulaires.

Si l'on double l'équation en μ et qu'on l'additionne avec celle en m, il vient :



Coefficients en m : 2 x (a) + (b)
Coefficients en μ : 2 x (a) + (c)
mais il n'y a plus rien dans les colonnes hachurées, ainsi que dans les lignes hachurées d'où :

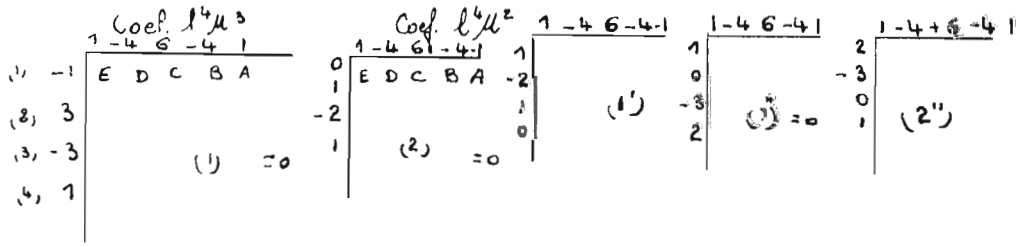
$$9\, b_2 = -4\, A_1 + 6\, A_2 - 2\, A_4 + 6B_1 + 3B_4 - 2D_1 + 3D_2 - D_4$$

d'où B2

solution valable en x, en y et en z

2-2-8-2- Cas d'une surface 4 X 5 (surface en cubiques et quartiques)

On cherche les pôles C_2 et C_1 en annulant les coefficients des termes en $l^4\mu^3$ et $l^4\mu^2$



(1) peut être remplacé par (1') = (1) + (2)
on peut encore prendre (1'') = (1') + 2 (2) (2'') = 2 (1'') + (2)
(1'') permet de déterminer C_1 et (2'') donne C_2 car

$$18\, C_1 = (E_4 - 4D_4 + 16\, C_4 - 4B_4 + A_4) + 2(E_3 - 4D_3 + 16\, C_3 - 4B_3 + A_3) - 3(E_2 - 4D_2 - 4B_2 + A_2)$$

$$18\, C_2 = 2(E_4 - 4D_4 + 16\, C_4 - 4B_4 + A_4) + (E_3 - 4D_3 + 16\, C_3 - 4B_3 + A_3) - 3(E_3 - 4D_3 - 4B_3 + A_3)$$

2.2.8.3.- Cas d'une surface 5x5 (surfaces en quartiques)
On a 3 fois 2 pôles centraux .

$(\mu^2=0)$

$2 \times \begin{matrix}1\\-2\\1\\0\end{matrix} + \begin{matrix}0\\1\\-2\\1\end{matrix} = \begin{matrix}2\\-3\\0\\1\end{matrix}$

A_1
$A_2 - A_1$
$A_3 - 2A_2 + A_1$
$A_4 - 3A_3 + 3A_2 - A_1$
$A_5 - 4A_4 + 6A_3 - 4A_2 + A_1$
$A_3 - A_2$
$A_4 - 2A_3 + A_2$
$A_5 - 3A_4 + 3A_3 - A_2$
$A_4 - A_3$
$A_5 - 2A_4 + A_3$
$A_5 - A_4$

$1 \quad 4\mu \quad 6\mu^2 \quad 4\mu^3 \quad \mu^4$
$\qquad\qquad (a) \qquad (b) \qquad (c)$

(a)

B	1	-2	1	0	0
2					
-3					
0					
1					

(b)

	0	1	-2	1	0
2					
-3					
0					
1					

(c)

	0	0	1	-2	1
2					
-3					
0					
1					

On va annuler les termes en μ^2, μ^3 et μ^4

Calculons B_2 et B_3. Il faut éliminer B_4, et, pour avoir B_2, il suffit d'éliminer B_3 3 (a) + (d) en m (a) en μ

$\mu^2 = \mu^3 = 0$

(d)

	0	2	-3	0	1
2					
-3					
0					
1					

$\rightarrow$ 2(b)+(c) en l
(a) en μ

B_2	3	-4	0	0	1
2	6	-8			2
-3	-9	12			-3
0					
1	3	-4			1

Calcul de B_3

$12\ B_2 = 6A_1 + 8A_2 - 2A_5 + 9B_1 + 3D_4 + 4D_2 - D_5 + 3B_5$
en μ = (a)
en m = (a) + (d)
$6\ B_3 = -2A_1 + 4A_3 - 2A_5 + 3B_1 + 3B_5 - D_1 + 2D_3 - D_5$

A titre d'exercice , calculons la valeur de B4.

Pour cela nous allons éliminer B2, en faisant 2(b)+ (a); il vient la représentation (e)

B_3	1	0	-2	0	1
2	2		-4		2
-3	-3		6		-3
0					
1	1		-2		1

Pour éliminer B3, il suffit de faire (3e) + e , d'où

$12\ B_4 = -2A_1 + 8A_4 - 6A_3 + 3B_1 + 9B_5 - D_1 + 4D_4 - 3D_5$

En faisant (c) + (e), il vient

(e)

B_2	1	0	-3	2	0
2					
-3					
0					
1					

B_4	1	0	0	-4	3
2	2			-8	6
-3	-3			12	-9
0					
1	1			-4	3

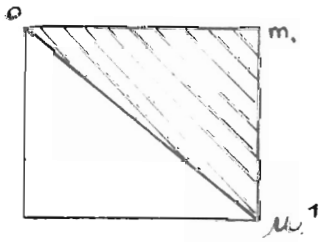
qui est bien la représentation symbolique trouvée précédemment.

B_3	1	0	-2	0	1
2	2		-4		2
-3	-3		6		-3
0					
1	2		-2		1

Remarque 1 : Un catalogue donnera les pôles centraux des diverses surfaces, en allant jusqu'aux courbes du 4ème ordre

parabole		cubique		quartique	
1		2		3	1
-2		-3		-4	0
1		0		0	-2
		1		0	0
				1	0

Remarque 2 : La méthode par abaissement de degré permet de faire le point entre les surfaces rectangulaires et les surfaces triangulaires.



2.2.8.4. - Recherche des pôles centraux par des conditions particulières

La méthode de détermination des pôles centraux par abaissement de degré a l'avantage de conduire à une définition simple de la surface; par contre, elle ne conduit pas forcément à la définition la plus juste de la surface.

Certaines particularités de la surface peuvent être utilisées pour établir des relations entre les pôles : p.ex. on peut se donner quelques points de la surface, faciles à positionner, et à respecter rigoureusement. On prendra un nombre de points égal au nombre de pôles à déterminer.

Dans certains cas, on rencontre des conditions de raccordement tangentiel entre les surfaces partielles composant la surface totale; on obtient des relations liant les pôles de deux surfaces contigües.

2.2.9. - Contours apparents.

Sur les surfaces à pôles, il est nécessaire de respecter certaines contingences particulières, par ex. que la tangente au contour apparent soit toujours dans un plan vertical.



Il faut se méfier du contour apparent, car il cache pas mal de pièges.

Soit un tore incliné : en projection, le cercle → ellipse et le cercle du tore → sphère projetée = cercle

On obtient une parallèle d'ellipse.

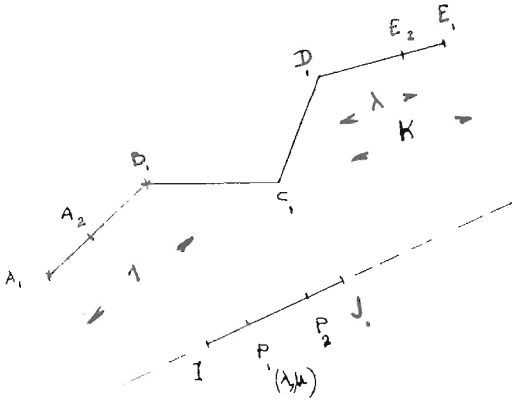
.../....

Au foyer, le rayon de courbure est nul et l'on voit le tore comme un point anguleux; ensuite, le rayon de courbure change de signe et le contour apparent se coupe (contour apparent virtuel caché par une partie de la pièce); il n'y a donc pas possibilité d'usiner par fraisage.

En pratique, il ne faut donc pas de rebroussement.

Le contour apparent pose le problème du raccordement d'une surface à pôles avec le cylindre projetant (tangent au contour apparent).

Le plan tangent le long d'une courbe est défini par 2 ligne de pôles $\begin{matrix}(A_1\ B_1\ \ldots\ E_1\\ (A_2\ B_2\ \ldots\ E_2\end{matrix}$



Pour que ce soit un contour apparent, il est nécessaire que les pôles A2, ... E_2, soient sur cette courbe P_2 est dans le plan tangent I_1 J_1 et P_1 se projette sur I_1 J_1 par suite, A_2 est sur A_1B_1 et E_2 sur D_1E_1 et quelles que soient les valeurs de λ et de μ, les points I_1, P_1, P_2 et J_1 sont alignés.

La projection horizontale de la surface donnera P_1

$$P_1 = \lambda^4 A_1 + 4\lambda^3\mu B_1 + 6\lambda^2\mu^2 C_1 + 4\lambda\mu^3 D_1 + \mu^4 E_1$$

De même $$P_2 = \lambda^4 A_2 + 4\lambda^3\mu B_2 + 6\lambda^2\mu^2 C_2 + 4\lambda\mu^3 D_2 + \mu^4 E_2$$

On sait calculer $I_1 = \lambda^3 A_1 + 3\lambda^2\mu B_1 + 3\lambda\mu^2 C_1 + \mu^3 D_1$

$J_1 = \lambda^3 B_1 + 3\lambda^2\mu C_1 + 3\lambda\mu^2 D_1 + \mu^3 E_1$

En réalité : $P_1 = \lambda I_1 + \mu J_1$ P_2 est du 4° degré et se trouve sur IJ, qui est du troisième degré. Or, $P_2 = \frac{\alpha I_1 + \beta J_1}{\alpha+\beta}$ mais alors A_2 et E_2 décrivent respectivement A_1 B_1 et D_1 E_1, dans le même rapport. La solution suivante n'est pas toujours une solution générale, sauf quelques cas particuliers (p.ex. dans le cas de pôles alignés).

Soient h et k deux constantes quelconques et posons $\begin{matrix}h\lambda + (1-K)\mu & \longrightarrow \alpha\\ (1-h)\lambda + K\mu & \longrightarrow \beta\\ (1)\lambda + (1)\mu = 1\end{matrix}$

pour $\mu = 0$ $I_1 = A_1$ $J_1 = B_1$ $\alpha = h$ $\beta = 1-h$ d'où : $P_2 = hA_1 + (1-h)B_1$

pour $\mu = 1$ $I_1 = D_1$ $J_1 = E_1$ $\alpha = 1-k$ $\beta = k$ d'où : $P_2 = (1-k)D_1 + kE_1$

Quand h et k sont connus, tous les autres points sont connus.

Identification : terme en λ^4 : $A_2 = hA_1 + (1-h)B_1$

terme en $\lambda^3\mu$: $4B_2 = (1-K)A_1 + 3hB_1 + 3(1-h)C_1$ $= \beta_2 + 3\beta_1$

terme en $\lambda^2\mu^2$: $6C_2 = 3(1-K)B_1 + 3hC_1 + 3KC_1 + 3(1-h)D_1$ $= \gamma_2 + \gamma_1$

terme en $\lambda\mu^3$: $4D_2 = 3(1-K)C_1 + 3KD_1 + hD_1 + (1-h)E_1$ $= 3\delta_2 + \delta_1$

terme en μ^4 : $E_2 = (1-K)D_1 + KE_1$

Sur B_1 C_1 on a le point β_1 dans le rapport $\frac{3h}{3(1-h)}$, et β_2 dans le rapport $\frac{1-k}{k}$; au quart de β_1 β_2 se trouve donc le point B_2 .

Sur B_1C_1, on a γ_1 avec le rapport h et γ_2 avec le rapport k et C_2 est à la moitié de γ_1 γ_2 .

moitié de
Sur C_1D_1, on a δ_1 avec le rapport $\frac{3k}{3(1-4)}$ et δ_2 avec le rapport $\frac{1-h}{h}$ et D_2 est au 1/4 de $\delta_1\ \delta_2$ (plus proche de δ_2)

D'où : $A_2 = hA_1 + (1-h)B_1$

$$B_2 = \frac{3}{4}\left[hB_1 + (1-h)C_1\right] + \frac{1}{4}\left[(1-K)A_1 + KB_1\right]$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\left[hC_1 + (1-h)D_1\right] + \frac{1}{2}\left[(1-K)B_1 + KC_1\right]$$
$$D_2 = \frac{1}{4}\left[hD_1 + (1-h)E_1\right] + \frac{3}{4}\left[(1-K)C_1 + KD_1\right]$$
$$E_2 = (1-K)D_1 + KE_1$$

en cubique	en quartique	au 5e degré
1/1	1/1	1/1
	3/4	4/5
2/3	5/2	6/10
		4/5
1/3	1/4	1/5
0/1	0/1	0/1

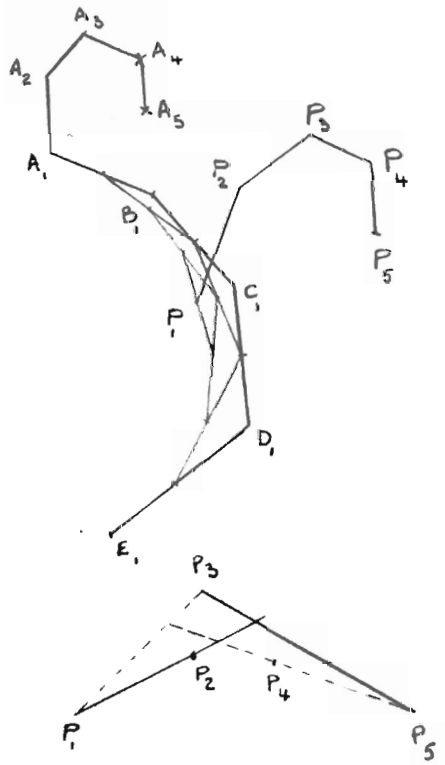
Valeur des coefficients

Il en découle un moyen graphique de faire toutes les proportionnalités, pour obtenir le plan tangent vertical le long d'un contour apparent imposé.

2 - 3 - 0 Sections planes à paramètres constants

Dans le cas de tubulures, p. ex, on aura besoin de sections planes, qui seront prises à paramètres constants.
Suivant le nombre de pôles on aura (1 parabole (3pôles) ⇒ on aura un plan
courbes du 4ème ordre et 5ème ordre ⇒ 4 et 5 pôles dans un même plan.

Soit une tubulure de ligne de contour $A_1B_1C_1D_1E_1$



Les sections terminales sont planes
Prenons le point P_1 de paramètre 0,5 et on veut que P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, soient coplanaires (cad situés dans un même plan).
On prend trois points pilotes : P_1, P_3 et P_5 et on veut que P_2 et P_4 soient dans le plan défini par P_1, P_3 et P_5 quel que soit le rapport λ/μ.

$P_2 = \alpha_2 P_1 + \beta_2 P_3 + \gamma_2 P_5$ avec $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$ } quand μ
$P_4 = \alpha_4 P_1 + \beta_4 P_3 + \gamma_4 P_4$ $\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 = 1$ } et λ varient

Le degré de P_2 est le même que celui de $P_1P_3P_5$; donc α_2, β_2 et γ_2 sont des constantes, d'où : $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$

De même pour $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4 = \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

D'où la construction :

P. 4147_ 33

Remarque : Il est possible de coupler contour apparent et sections planes.

Pour une tubulure, on peut obtenir beaucoup de choses :

- Ligne moyenne
- Orientation des sections
- Section de départ
- Section terminale
- Contour apparent
- Sections intermédiaires.

2-3-1 - Surface à pôles développables

Généralités

Une surface développable est une surface qui peut être obtenue sans déformation permanente (ex : cylindre, cône).

Une surface développable est obligatoirement réglée. Le plan tangent le long d'une génératrice, (limite du plan fermé par deux génératrices voisines) est constant et la génératrice admet une enveloppe, qui, dans le cas général, est une courbe, qui peut être gauche, et dont les tangentes constituent les lignes de pliage. Cette courbe gauche peut être développée sur un plan.

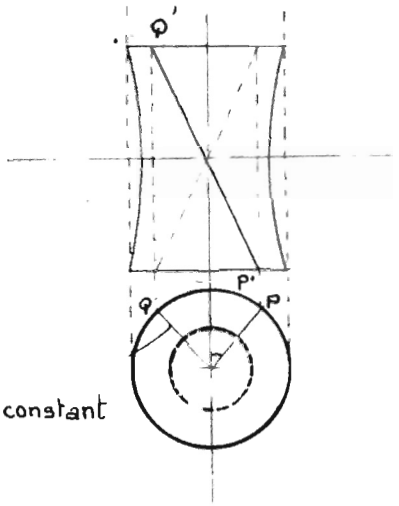
En général, la surface est limitée aux demi-tangentes.

L'indicatrice est une parabole en tout point, alors que les surfaces réglées en ont 2 qui correspondent aux 2 systèmes de génératrices.

Le plan tangent le long d'une génératrice est constant, alors que pour les surfaces réglées il ne l'est pas.

La normale est donc constante le long d'une génératrice, ce qui revient à dire que la surface parallèle est aussi développable.

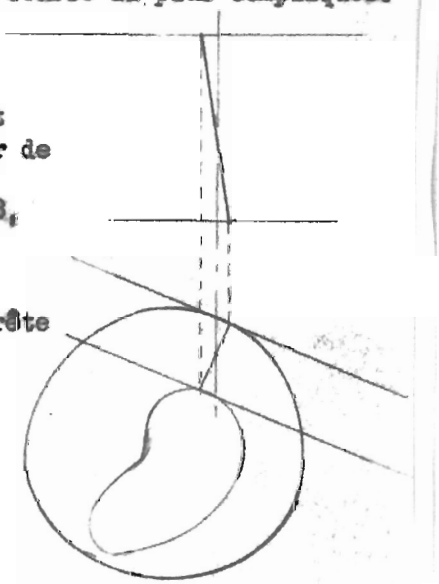
La courbe enveloppe de la génératrice s'appelle arête de rebroussement.



Ex : La surface engendrée par (PQ,P'Q') est une hyperboloïde de révolution à une nappe, ayant 2 génératrices et ce n'est pas une surface développable et la courbe parallèle n'est plus réglée.

Comment définir une surface développable?

Prenons un plan tangent aux deux courbes: P.ex : deux tangentes parallèles, d'où une génératrice de la surface développable et il reste à changer l'inclinaison des tangentes parallèles, en partant toujours de la courbe la plus compliquée.



L'arête de rebroussement existant dans la surface développable, on peut partir de ses pôles.

Supposons des pôles de courbe A,B, C,D,E,F, quelconques ; c'est l'arête de rebroussement (5° ordre).

Construisons le point de cette arête de paramètre 2/3.

La tangente à la courbe développable en un point G est LJ, c'est la génératrice d'une surface à pôles développables et l'arête de rebroussement y est entièrement contenue.

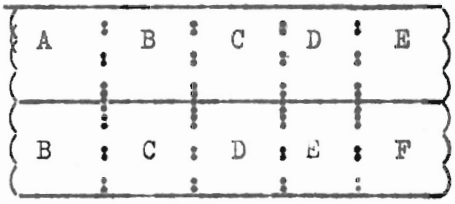


$$G = \lambda^5 A + 5\lambda^4\mu B + 10\lambda^3\mu^2 C + 10\lambda^2\mu^3 D + 5\lambda\mu^4 E + \mu^5 F$$

avec
$$I = \lambda^4 A + 4\lambda^3\mu B + 6\lambda^2\mu^2 C + 4\lambda\mu^3 D + \mu^4 E$$
$$J = \lambda^3 B + 4\lambda^3\mu C + 6\lambda^2\mu^2 D + 4\lambda\mu^3 E + \mu^4 F \quad (L)$$
(m)

Les pôles de rebroussement étant dans cette zone, il faut que les pôles soient en dehors.

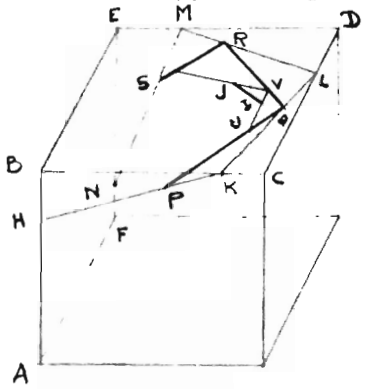
L'arête de rebroussement sortira de la surface, sauf en F et A.



$B + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.C + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.D + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.E + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}.F$ (lignes de pôles extrapolés de paramètre 1/2

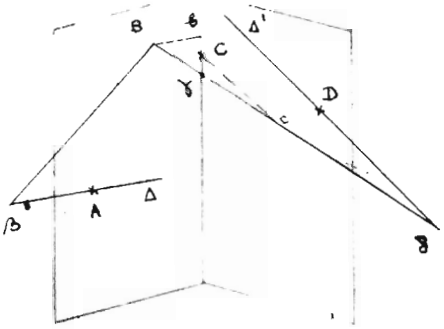
$B + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{EF}$ (Lignes de pôles extrapolés de paramètre 2

On a une surface développable à plan de symétrie.



2-31-2 – Cas particulier : On connaît une directrice pour les pôles A,B,C,D et leurs génératrices aux extrémités de la pièce.

2-31-2-1- 1ère méthode : Solution abandonnée ; claire dans le cas de la cubique.



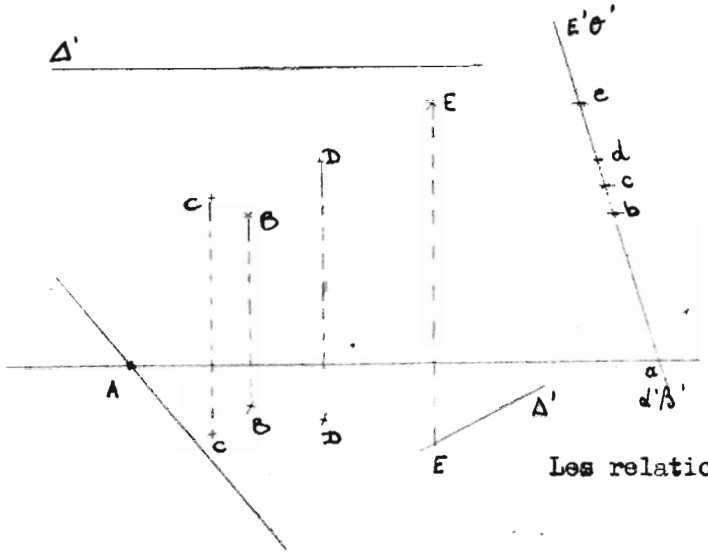
α β γ δ ε

$A = \lambda\alpha + \mu\beta$
$B = \lambda\beta + \mu\gamma$
$C = \lambda\gamma + \mu\delta$
$D = \lambda\delta + \mu\varepsilon$

α et β sont sur Δ, donc Δ est une tangente extrême.
γ est sur la droite intersection des plans
δ et ε sont sur Δ' donc est une tangente extrême/

En projetant B parallèlement à Δ et C parallèlement à Δ' on a le rapport λ/μ.

2-31-22 2ème Méthode : et sont supposées non parallèles, elles forment une direction de plan.



On a les pôles de la courbe arête de rebroussement et A est sur , B sur etc..

Projetons, dans la direction de plan, sur une droite quelconque. Les pôles se projetteront aussi sur la droite.

Comme est dans le plan horizontal et que sont sur , ils se projetteront en a ; de même se projetteront en C.

Les relations restent valables :

$A = \lambda\alpha + \mu\beta$ $\quad a = \lambda a + \mu a$

$B = \lambda\beta + \mu\gamma$ $\quad b = \lambda a + \mu\gamma' \rightarrow \mu, \gamma'$

$C = \lambda\gamma + \mu\delta$ $\quad c = \lambda\gamma' + \mu\delta' \rightarrow \mu, \gamma'\delta'$

$D = \lambda\delta + \mu\varepsilon$ $\quad d = \lambda\delta' + \mu e$ $\quad \delta$ de

$E = \lambda\varepsilon + \mu\theta$

Eliminons les points α', β', γ' et δ'

$\lambda b - \mu c = \lambda^2 a - \mu^2\delta'$

$d = \lambda\delta' + \mu e$ $\quad \Big| \ \lambda\mu^2 \rightarrow \lambda^2 b - \lambda\mu c + \mu^2 d = \lambda a^3\mu^3 e \rightarrow \lambda^3 a - \lambda^2 b + \lambda\mu c - \mu^2 d + \mu^3 c = 0$ équation

du troisième degré pour calculer μ $(\lambda + \mu = 1)$, ayant toujours une solution et parfois 3.

? Enveloppe des Enveloppe ?

P. 4147 - 37

Appendice : Résolution des équations algébriques et transcendantes

1 - Résolution de l'équation du 3° degré

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\frac{1}{2} \cdot f''(x) = 3ax + b = \frac{1}{2}$ dérivée seconde

Ecoreuler au Newton

On choisit une valeur de x, d'où : $X = x - \frac{f}{f' - \frac{f}{f'} f''}$ (Méthode de l'hyperbole)

$f_0 = a$	$f'_0 = a$	$f''_0 = 0$
$f_1 = ax + b$	$f'_1 = a$	$f''_1 = 0$
$f_2 = x f_1 + c = ax^2 + bx + c$	$f'_2 = x f'_1 + f_1 = 2ax + b$	$f''_2 = x f''_1 + 2 f'_1 = 2a$
$f_3 = x f_2 + d$	$f'_3 = x f''_2 + f_2$	$f''_3 = x f''_2 + 2 f''_2$
$= ax^3 + bx^2 + cx + d$	$= 3ax^2 + 2bx + c$	$= 6ax + 2b$

Application numérique.

1°) $x^3 - 3x + 1 = 0$

3 racines : $2 \sin 10°$, $2 \sin 50°$, $2 \sin 70°$

2°) $f = x^2 - 4 = 0$

$f' = 2x$

$f'' = 1$

pour $x = 3$; $X = 1 - \frac{-3}{2 + \frac{3}{2} \times 1} = \frac{13}{7} = 1{,}857$

Newton donnait $X = 1 - \frac{f}{f'} = 2{,}5$

pour $x = 3$; $X = 3 - \frac{5}{6 - \frac{5}{6} \times 1} = \frac{63}{31} = 2$ avec $\frac{1}{31}$ d'erreur

Newton donnait : $X = \frac{13}{6}$ (2 erreurs)

3°) $f = x^2 - 2$

$f' = 2x$

$f'' = 1$

pour $x = 1$; $X = \frac{7}{5} = 1{,}4$

pour $x = \frac{3}{2}$; $X = \frac{3}{2} - \frac{1/4}{3 - \frac{1}{3} \times 1} = \frac{99}{70} = 1{,}414285$

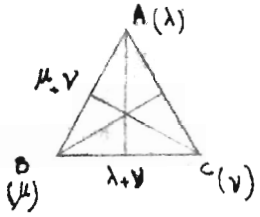
pour $x = \frac{7}{5}$; $X = \frac{7}{5} - \frac{-1/25}{\frac{14}{5} + \frac{1/25}{14/5} \times 1} = \frac{1393}{985} = 1{,}4142132$

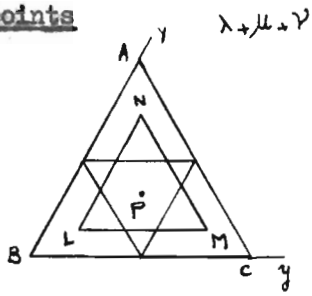
Newton	N+M
$3/2 = 1{,}5$	$\frac{17}{12} = 1{,}4166$

SURFACES TRIANGULAIRES A POLES

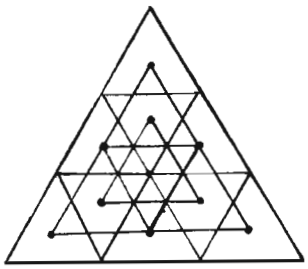
La surface à pôle triangulaire est du 3e degré vrai, car il n'y a pas de termes en $x^2 y^2$. p. ex :

2-31 - Barycentre de 3 points





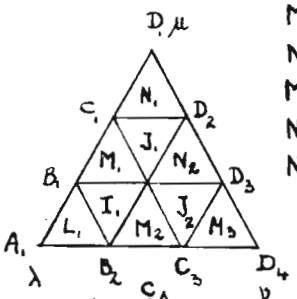
Le barycentre dépend globalement des trois points. Il y a permutation circulaire possible entre les trois paramètres
Les barycentres sont L, M,N, et le nouveau barycentre de LMN est le point P
Les triangles ayant la pointe en bas ne sont pas à considérer.



Ce cas se ramène au cas précédent. On peut considérer ces barycentres comme des sous-pôles.
Si l'on a n points, le nombre de pôles est : $\frac{n(n-1)}{2}$

2-32- Courbes contours :

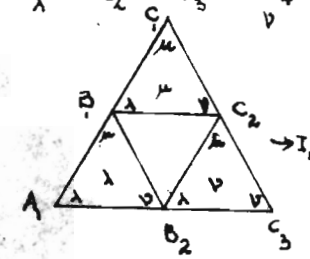
Chaque courbe-contour est celle qui a les 4 pôles sur un côté.

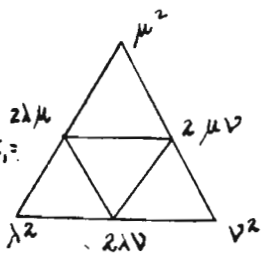


$L_1 = \lambda A_1 + \mu B_1 + \nu B_2$
$M_1 = \lambda B_1 + \mu C_1 + \nu C_2$
$N_1 = \lambda C_1 + \mu D_1 + \nu D_2$
$M_2 = \lambda B_2 + \mu C_2 + \nu C_3$
$N_2 = \lambda C_2 + \mu D_2 + \nu D_3$
$N_3 = \mu C_3 + \mu D_3 + \nu D_4$

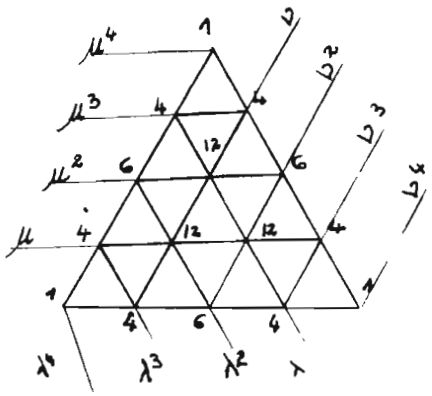
I_1	J_1	J_2
λ		
μ	λ	
	μ	
ν		λ
	ν	μ
		ν

avec $\lambda + \mu + \nu = 1$



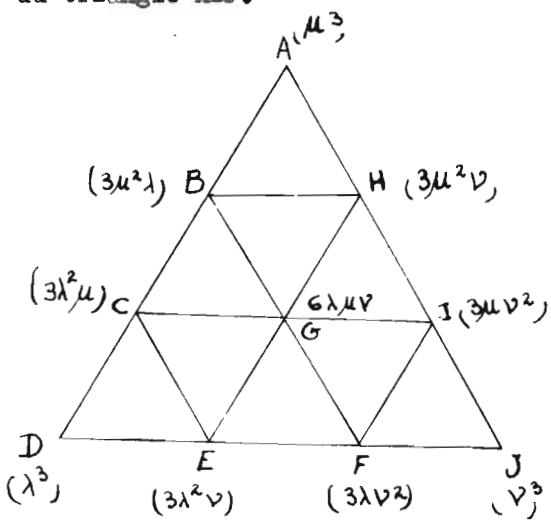


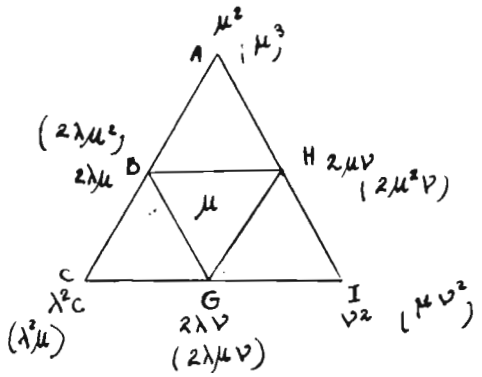
Ce qui précède est valable pour le 4e ordre.

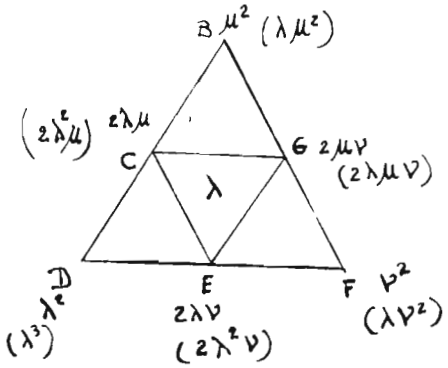


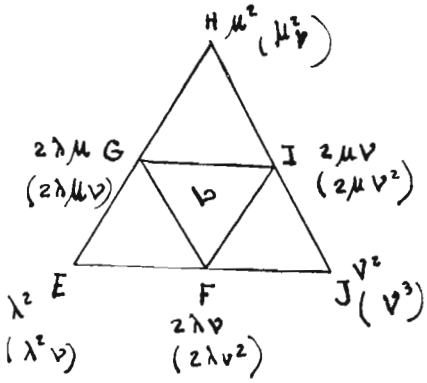
P. 4147 - 39

On va décomposer le triangle ADJ en trois autres dont on connaît les courbes contours ; par superposition de ces 3 triangles, on reconstituera les courbes contours du triangle ADJ.



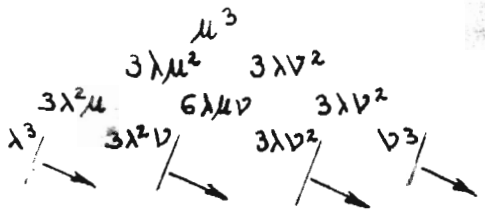






P. 4147 — 40

Occupons-nous de la grille du 3° ordre :



Mettons en facteur suivant les flèches : barycentre dans rapport μ/ν .

$\lambda^3 A$

$3\lambda^2(\mu B_1 + \nu B_2) = 3\lambda^2(\mu+\nu)\dfrac{\mu B_1 + \nu B_2}{\mu+\nu} = 3\lambda^2(\mu+\nu)B$

$3\lambda(\mu^2 C_1 + 2\mu\nu C_2 + \nu^2 C_3) = 3\lambda\dfrac{(\mu^2 C_1 + 2\mu\nu C_2 + \nu^2 C_3)(\mu+\nu)^2}{(\mu+\nu)^2} = 3\lambda(\mu+\nu)^2 C$

$\dfrac{(\mu+\nu)^3(\mu^3 D_1 + 3\mu^2\nu D_2 + 3\mu\nu^2 D_3 + \nu^3 D_4)}{(\mu+\nu)^3} = (\mu+\nu)^3 D$

On a donc pris le point de paramètres μ, ν sur une droite B, sur une parabole (B) (C) et sur une cubique (D)

Ces 4 points sont les pôles d'une cubique de paramètres $\lambda' = \lambda$ et $\mu' = \mu + \nu$

$P = \underset{\lambda'\mu'}{} \lambda' A + 3\lambda'^2\mu' B + 3\lambda'\mu'^2 C + \mu'^3 D$

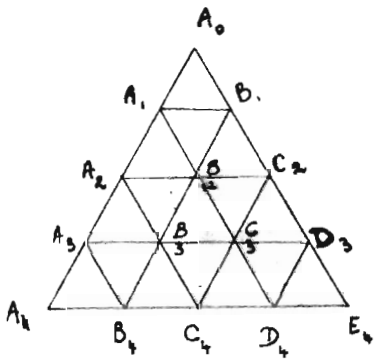
La surface à pôles est donc engendrée par une courbe à pôles, passons par A et tous les pôles se déplacent sur 4 courbes variables de degrés différents.
On a trois familles distinctes, car ce qui précède est valable pour λ , μ, ν
Le plan tangent est le plan $I_1 J_1 J_2$ et le point P se trouve dans ce plan.

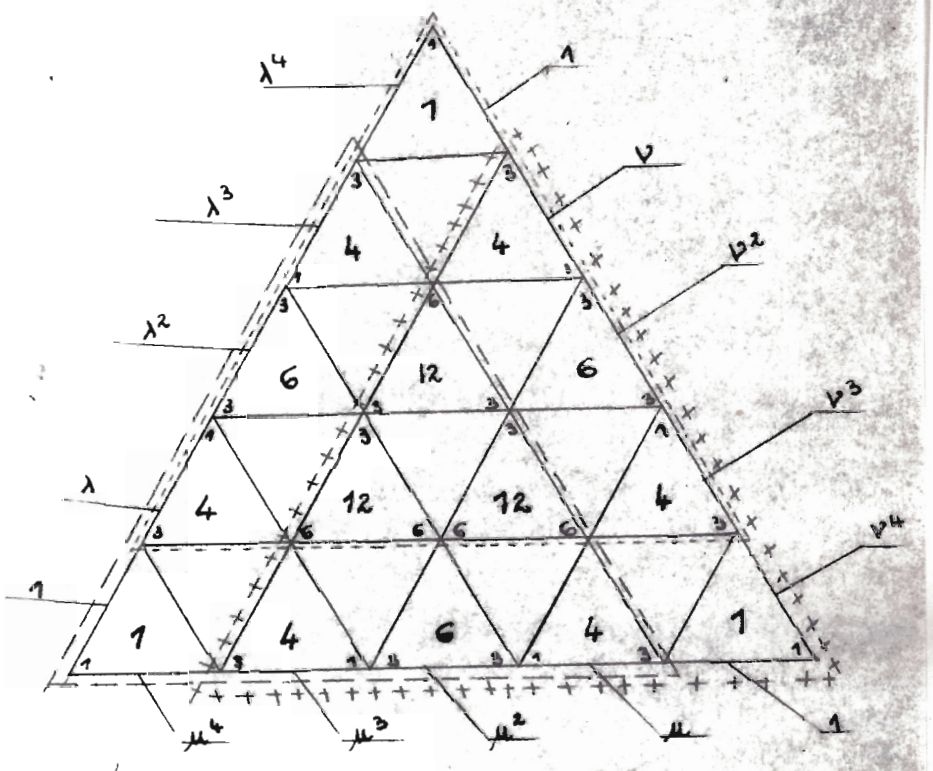
Il y a une ∞ de cubiques passant par le point P, parce que le degré ne croît pas par combinaison linéaire entre

Si $\frac{\mu}{\nu} = C^{te}$, on a des pôles B,C,D, constants ; les cubiques passent par le sommet A du triangle.

Si $\mu+\nu = C^{te}$, on a les cubiques dites parallèles aux côtés et passant par P.

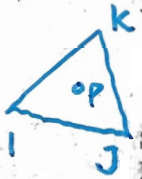
2-33 - CONTOUR APPARENT LE LONG D'UNE COURBE





P. 4147 - 41

Le plan tangent ne dépend que d'une ligne de pôles.
Mettons le poids de chaque point dans chaque case. Le plan tangent est fermé de 3 points :



$P = \lambda I + \mu J + \nu K$

I dans l'angle λ (chiffre supérieur).....
J " " μ (chiffre à gauche)____
K " " ν (Chiffre à droite)+++++

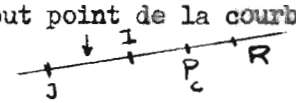
Sur ce schéma, on a donc le point et le plan tangent.
Etudions la courbe contour $A_4B_4C_4D_4E_4$, $\lambda = o$ Les coefficients de points sont donc : 1,4,6,4,1.

D'où le point P_c ou contour apparent : $P_c = \mu^4 A_4 + 4\mu^3\nu B_4 + 6\mu^2\nu^2 C_4 + 4\mu\nu^3 D_4 + \nu^4 E_4$
Le plan tangent est formé par les trois points : $IC = \mu^3 A_3 + 3\mu^2\nu B_3 + 3\mu\nu^2 C_3 + \nu^3 D_3$
$JC = \mu^3 A_4 + 3\mu^2\nu B_4 + 3\mu\nu^2 C_4 + \nu^3 D_4$
$KC = \mu^3 B_4 + 3\mu^2\nu C_4 + 3\mu\nu^2 D_4 + \nu^3 E_4$

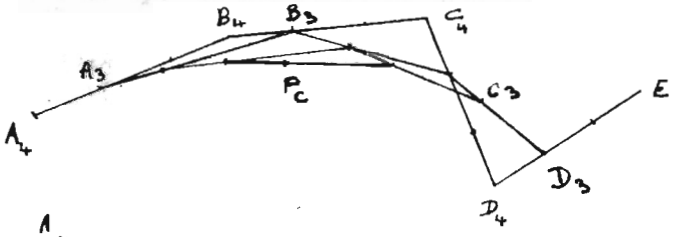
JK est la tangente au contour. Si P_c est sur cette droite, le point I doit s'y trouver. I est donc le barycentre des points J et K (ils sont du même degré), p. ex : $I = kJ + (1-k)k$ et on identifie degré par degré quelque soit le paramètre de calcul choisi.

Cette relation doit être valable pour tout point de la courbe envisagée $\lambda = o$

Signification géométrique : avec $k = \frac{1}{3}$



Les points $A_3B_3C_3D_3$ sont des cas particuliers de construction. Le rapport est donc imposé par $\frac{A}{A_4A_3}$ (que l'on retrouve en D_4D_3) ; il y a donc moins de liberté.
Ceci ne concerne que les 2 premières lignes de pôles ; la troisième ligne de pôles concernant la courbure. La construction est valable en X et en Y et non en Z.

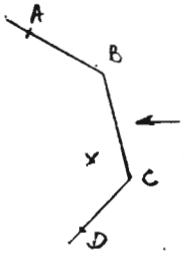


On a toutes les symétries du triangle (permutation, circulaire, plus retournement).

Remarque : Les contours apparents peuvent être employés avec subtilité p.ex : le demi-capot de voiture. Si l'on veut une nervure, il est nécessaire d'avoir 2 demi-capots sécants :



sans nervure
Avec nervure $A_1B_1C_1$
Il y a tangence en A.



Sans nervure aux extrémités
Avec nervure au centre

Remarque : L'utilisation des surfaces triangulaires est plus souple que celle des surfaces rectangulaires :
Surface triangulaire : plan tangent défini par 3 points
Surface rectangulaire : plan tangent défini par 4 points non forcément dans un même plan. ?
L'augmentation du degré est possible, en multipliant par λ, μ, ν (chaque pôle étant considéré comme le barycentre des 3 autres.)

2-3-4- AUGMENTATION DE DEGRE

2-3-4-1- Elévation de degré de 3 à 4. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Les pôles aux centres des faces sont donnés. A,B,C,D,E, sont inconnus. On va multiplier symboliquement par $\lambda + \mu + \nu$
Quand on multiplie par λ on trouve les chiffres supérieurs
" " μ " " à gauche
" " ν " " à droite

Hiches Bréal voir feuille 52

P. 4147 - 42

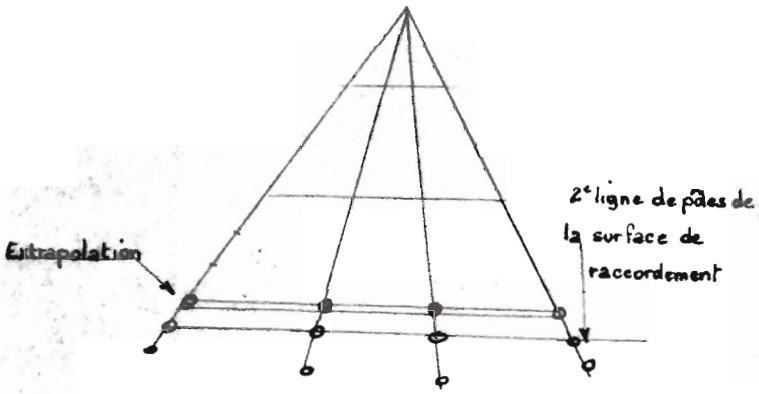
2-4 RACCORDEMENT DE SURFACES A POLES

Les deux surfaces à pôles doivent avoir une courbe contour commune, le long de laquelle elles sont tangentes en tout point.

2-4-1 Principe général.

Dans le cas de surfaces triangulaires seulement, on peut prendre 3 points quelconques et chercher les pôles correspondants ; mais c'est un problème assez compliqué.

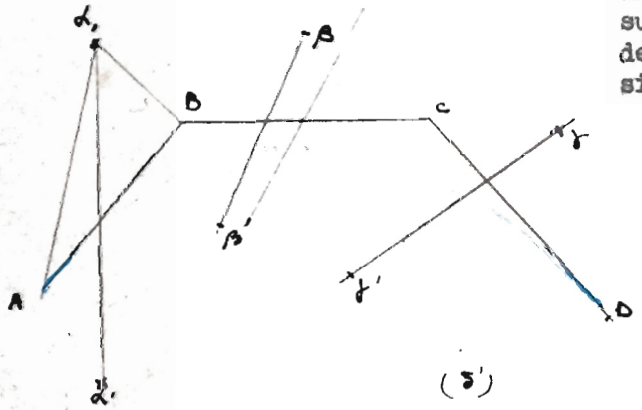
On va supposer que l'on a affaire à une surface rectangulaire contiguë.

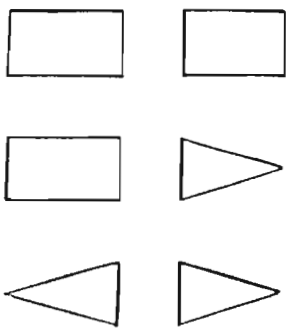


Il faut trouver les pôles d'un arc extrapôle. On peut considérer ces points comme les pôles d'une courbe. Avec 4 pôles, on prend des points au tiers, d'où extrapolation possible de ces droites. On conserve la courbe de contact commune et la seconde ligne de pôles, le plan tangent ne dépendant que de la tangente à la courbe et d'un pôle. On peut rajouter une troisième ligne de pôles, d'une surface à pôles cherchée.
On obtient un raccordement et non tous les raccordements.

2-4-2 Raccordement de deux surfaces triangulaires.

Considérons une courbe contour ABCD, le long de laquelle se raccordent deux surfaces à pôles, lesquelles peuvent être : deux surfaces rectangulaires
une surface rectangulaire et une surface triangulaire
deux surfaces triangulaires (le plus simple).





$$P = \lambda^3 A + \dots\dots$$
$$I = \lambda^2 A + 2\lambda^2\mu B + \mu^2 C$$
$$J = \lambda^2 B + 2\lambda^2\mu C + \mu^2 D$$

P. 4147 - 43

Le cas le plus simple consiste à avoir au second degré un point Q appartenant à la courbe voisine.

QQ' et IJ sont coplanaires (dans un même plan) ; par suite Q',Q,I,J sont du même dgré et l'on a :

$$\Delta \left| \begin{array}{l} = \lambda^2\alpha + 2\lambda\mu\beta + \mu^2\gamma \\ = \lambda\alpha + 2\lambda\mu\beta' + \mu^2\gamma' \end{array} \right.$$

dont on cherche le barycentre tel que I,J,Q donnant Q'
Q' = uI + vJ + WQ avec : u+v+w = 1

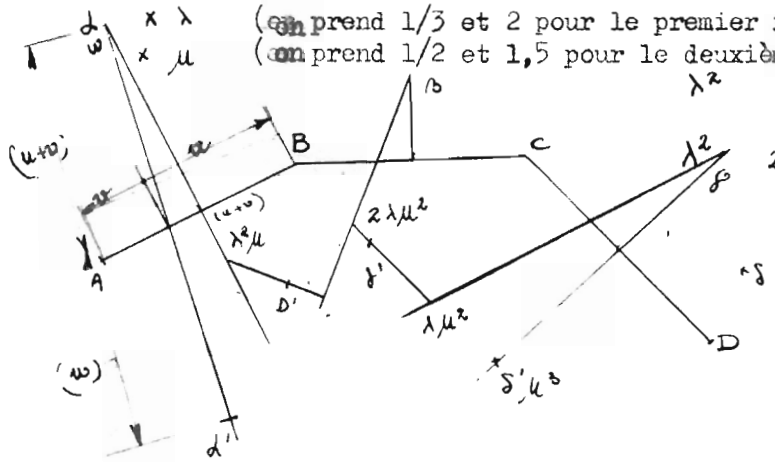
24-3- Raccordement d'une surface rectangulaire Q' et d'une surface triangulaire Q

Il faut tout passer au 3° degré; comme I et J sont au second degré, il faut inventer les termes du 3° degré. Ex : on prend p.ex : $\lambda = 1$ et on cherche le barycentre α' de I,J,Q correspondant. Car la somme des coefficients doit être égale à $\lambda + (1)$

Il reste une solution supplémentaire qui ne donne pas l'élévation totale du degré de la courbe : u et v ≠ u' et v'.

$$\begin{aligned} I &= (u - v)\lambda + (u')\mu \\ J &= (v)\lambda + (v' - u')\mu \\ Q &= (1 - u)\lambda + (1 - v')\mu \\ Q' &= \lambda + \mu \end{aligned}$$

On a donc deux baycentres en (u, v) et (u',v'), que l'on combine en (λ, μ)



(on prend 1/3 et 2 pour le premier rapport)
(on prend 1/2 et 1,5 pour le deuxième rapport)

λ^2 $2\lambda\mu$ μ^2 $\times\lambda \rightarrow$ λ^3 $2\lambda^2\mu$ $\lambda\mu^2$

$2\lambda\mu$ μ^2 $\times\mu \rightarrow$ $\lambda^2\mu$ $2\lambda\mu^2$ μ^3

D'où les poids des points de la figure ci-contre.

- Si $\lambda = 0$, on est en A et on le pôle α' .
- Si $\lambda = 1$, on est en D et on a le pôle δ'

Les pôles β' et γ' sont obtenus d'après les coefficients de I et J.

on voit que $\omega > 1$

$\alpha' = u A + \omega B + \omega \alpha$

On a augmenté d'un point le degré du plan LJQ. On a donc le choix de α' et δ' (naturellemet dans les plans tangents) ; après les autres pôles sont imposés.

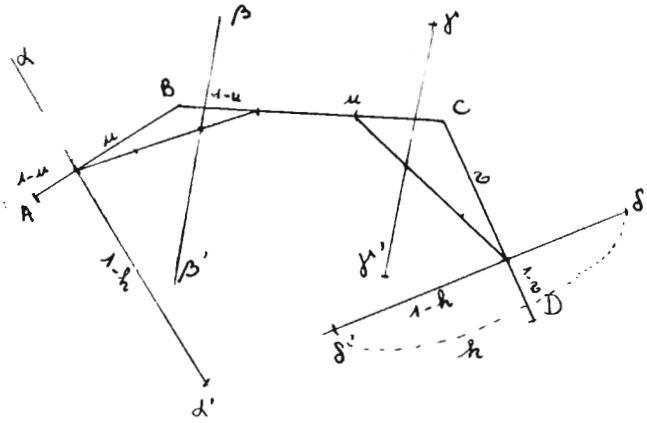
Remarque : On peut avoir le problème inverse : raccordeur une surface triangulaire à une surface rectangulaire.

Dans ce cas $Q = \lambda^3\alpha + 3\lambda^2\mu\beta + 3\lambda\mu^2\gamma + \mu^3\delta$ il faut tâtonner $\left[1 + \lambda + (1 - v)\mu\right]h \quad \vec{I}$

$Q' = \lambda^2\alpha$ $\left[(1 - u) + v\mu\right]h \quad \vec{J}$

P. 4147 - 44

24-4 - Raccordement de deux surfaces rectangulaires



I et J sont du second degré. On augmente le degré de I et J. Q et Q' sont du 3°degré

$$\left.\begin{matrix} I\left[(u)\lambda + (1+v)\mu\right] \\ J\left[(1-u)\lambda + v\mu\right] \end{matrix}\right) h$$

I et J donnent un produit IJ, avec le coefficient h, et q donne un point avec le coefficient (1-h)

h et (1 - h) donnent un barycentre ; Q est du 3° degré, ainsi que le point de Ij, on peut identifier :

terme en $\lambda^3 \longrightarrow h\left[u A + (1-u) B + (1-h) d\right] =$

$\alpha' \rightarrow \alpha$ est dans le plan α AB

terme en $\mu^3 \longrightarrow h\left[(1-v) C + v D\right] + (1-h)\delta =$

$\delta' \rightarrow \delta$ est dans le plan δ CD

Pour construire les autres points, on a : $\lambda^2\mu$

$$3\left[\frac{2}{3}\left[u B + (1-u) C\right] + \left[(1-u) A + u B\right]\frac{1}{3}\right] h + 3(1-h)\beta = 3\beta'$$

β' est le barycentre de 2 points, de poids h et (1 - h), un des points étant β : on prend les 2/3 sur la ligne qui joint BC et AB et on fait le rapport $\frac{1-h}{h}$ à partir de β .

De même : $\lambda\mu^2$ $\quad 3\left[\frac{1}{3}\left[v C + (1-v) D\right] + \frac{2}{3}\left[v B + (1-v) C\right]\right] h + 3(1-h)\gamma = 3\gamma'$

(sur CD ; sur BC)

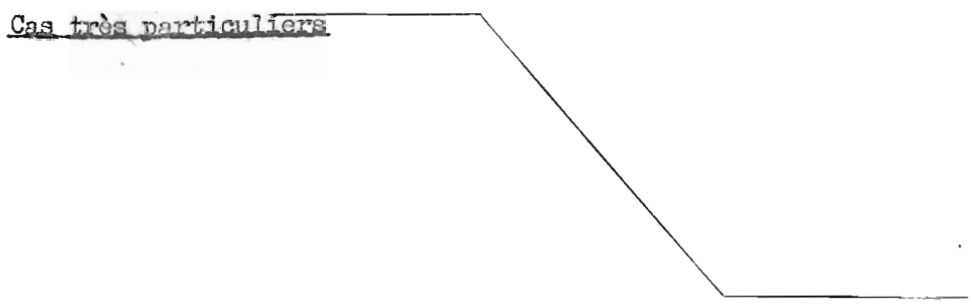
β' est le barycentre de 2 points, le poids h et (1-h), un des points étant γ : on prend le 1/3 sur la ligne qui joint BC et AD et on fait le rapport $\frac{1-h}{h}$ à partir de γ .

Remarques

1°) $\alpha\,\alpha'$ A,B forment le plan tangent à l'extrémité dans tous les cas. Seuls les points intermédiaires s'obtiennent différemment, dans le cas des raccordements ◁▷ ◁▷

2°) Cette construction s'étend facilement au 4° degré , en raisonnant de la même façon que pour le troisième degré, mais sur les λ^4 ..... u^4

Cas très particuliers



P. 4147 - 45

- Cas très particuliers :

Surface à pôles se raccordant avec un plan tout le long d'un contour. Les pôles de contour doivent être dans ce plan ; il en est de même de la seconde ligne de pôles.

1/2 1/2	1/3 1/3	1/4 1/4
2°degré	3°degré	4°degré

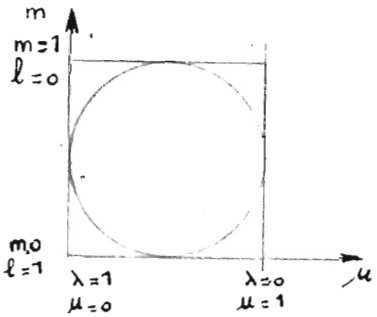
P. 4147 - 46

2-5- Surfaces à contour continu ou de forme spéciale

2-5-1- Cercle des paramètres

Les pôles permettent de définir les tangentes en les plans tangents aux angles du contour décomposé en plusieurs courbes.

Dans le plan des paramètres, on est dans un carré ou un triangle de côté 1.



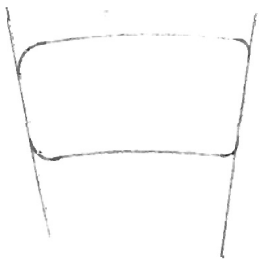
Décomposons un cercle dans cette surface.
Considérons :

$(\mu-\lambda)^2+(m-l)^2=1$ représente une équation de second degré, $(\mu-\lambda)$ varie de 0 à 1 pour $\lambda=\mu$, on est au milieu du segment. De même pour $(m-l)$
Ce ne peut donc être qu'un cercle.

On peut donc limiter la surface à l'image du cercle des paramètres (tangent au contour au point de paramètre 0,5) et l'usinage est un contour continu.

Il suffit donc de chercher les 4 points de paramètre 1/2 avec leurs tangentes.
On peut également remplacer le cercle par l'ellipse.

Prenons le cas d'une fenêtre non circulaire, avec les angles mouchés : c'est $x^4+y^4=1$.





Les côtés sont imposés (carré avant le mouchage des angles).
Par suite des symétries imposées, il y a des simplifications ; La courbe n'a plus besoin d'être fermée $(\mu-\lambda)^4+(m-l)^4=1$
Parmi les usages possibles, citons le moyen de faire un raccord, p. ex un phare dans une aile ; on a 2 surfaces à pôles, l'une extérieure au cercle (aile), l'autre intérieure (phare). Le mode de balayage n'est pas modifié, les deux surfaces peuvent être balayées simultanément.

Le contrôle du signe de ces expressions nous dira si l'on est intérieur ($<o$) ou extérieur ($>o$) ou sur la courbe ($=o$), en chaque point de la courbe.

2-5-2- Raccordement à un plan

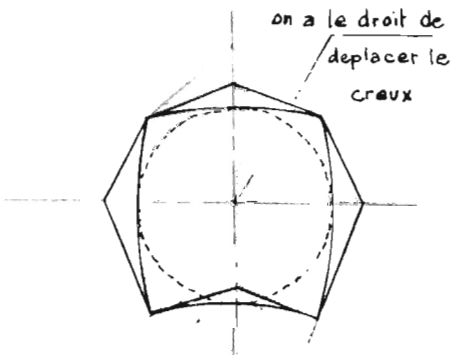
$(\mu-\lambda)^2+(m-l)^2-1=o$

On va faire des surfaces affinées, quels que soient les axes de coordonnées. En pratique, on prendra l'axe Oz vertical, car c'est l'axe de la fraise.

Formons : $z=(\mu-\lambda)^2+(m-l)^2-1$

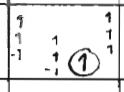
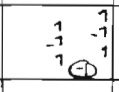
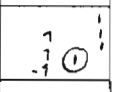
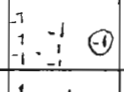
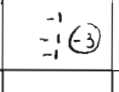
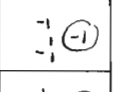
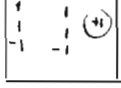
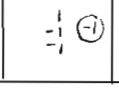
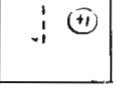
On aura donc des surfaces paraboliques et pour z = 0, on a un cercle. et on identifie.

$(\mu-\lambda)^2(m+l)^2+(m-l)^2(\mu+\lambda)^2-1(\mu+\lambda)^2-1(\mu+\lambda)^2(m+l)^2=z$.



Si le z possède des pôles proportionnels à ..... pour l'image de cercle, on a z = o (ce que l'on a voulu faire).
D'où : 4 paraboles contours et cercle tangent aux paraboles et, en tout point de ce cercle, le cote z = o.
Pour avoir les pôles les coefficients obtenus sont à diviser par les coéfficients 1,2,4;2,1.

P. 4147-47

P_2	ℓ_2	$2\ell m$	m^2
λ^2			
$2\lambda\mu$			
μ^2			

→

	ℓ^2	$2\ell m$	m^2
λ^2	1	-1	1
$2\lambda\mu$	-1	-3	-1
μ^2	-1	-1	1

$$(\mu-\lambda)^2(m+\ell)^2+(m-\ell)^2(\lambda+\mu^2)-(\lambda+\mu)^2(\ell+m)^2=z$$

Remarque : On peut conserver les points trouvés par la grille, en conservant la loi en z et on peut également déformer la figure en x et en y.

Si on déporte le pôle central (z = -4,) on déplace le creux, sans changer la courbe horizontale. Les pôles seront alors tassés et la figure assez déformée?

2-5-3- Courbe du 4° degré. $(\mu-\lambda)^4+(m-\ell)^4-1=z$

On écrit et on identifie $(\mu-\lambda)^4(m+\ell)^4+(m-\ell)^4(\mu+\lambda)^4-1(\mu+\lambda)^4(m+\ell)^4=z$

carré arrondi avec 4 méplets.

		1	4	6	4	1	
		ℓ^4					
1	λ^4	1 1 -1	4 -4 -4	6 6 -6	4 -4 -4	1 1 -1	1 1
4	$4\lambda^3\mu$	-4 4 -4	-16 -16 -16	-24 24 -24	-16 -16 -16	-4 4 -4	4 -4
6	$6\lambda^2\mu^2$	6 6 -6	24 -24 -24	36 36 -36	24 -24 -24	6 6 -6	6 6
4	$4\lambda\mu^3$	-4 4 -4	-16 -16 -16	-24 24 -24	-16 -16 -16	-4 4 -4	4 -4
1	μ^4	1 1 -1	4 -4 -4	6 6 -6	4 -4 -4	1 1 -1	1 1
		1	4	6	4	1	
		1	-4	6	-4	1	

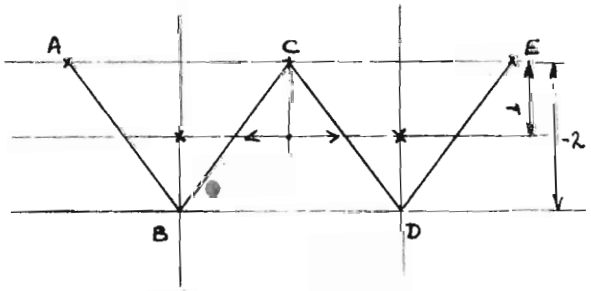
1	-4	6	-4	1	
-4	-48	-24	-48	-4	
6	-24	36	-24	6	
-4	-48	-24	-48	-4	
1	-4	6	-4	1	

Ce sont les coefficents des différents termes et non les pôles.
Pour avoir les cotes des pôles, il suffit de diviser par les coefficients 1,4,6; 4,1, dans les lignes et dans les colonnes, d'où : la grille des pôles :

1	-1	1	-1	1	0
-1	-3	-1	-3	-1	-2
1	-1	1	-1	1	0
-1	-3	-1	-3	-1	-2
1	-1	1	-1	1	0

Pour L = m = 0,5 ; on a z = 1

Construisons cette courbe : et le côte du point central est égale à -1



Avec 4 pôles alignés on a un méplat.

pôles de la courbe paramètre 0,5

En projection horizontale, on peut encore tasser les pôles et on peut déplacer les pôles pour déformer la surface à la demande, sans changer les z.

2-5-4-

P.4147.49

Обозначим $s = r^2 = \lambda^2 + \ell^2$

$$x = \lambda + k\lambda(\lambda^2+\ell^2) = \underline{\lambda(1+kr^2)} \quad \lambda(1+ks)$$

$$y = \ell + k\ell(\lambda^2+\ell^2) = \underline{\ell(1+kr^2)} \quad \ell(1+ks)$$

$$x^2+y^2 = \lambda^2 + 2k\lambda^2(\lambda^2+\ell^2) + k^2\lambda^2(\lambda^2+\ell^2)^2$$
$$+ \ell^2 + 2k\ell^2(\lambda^2+\ell^2) + k^2\ell^2(\lambda^2+\ell^2)^2$$
$$= \lambda^2+\ell^2 + 2k(\lambda^2+\ell^2)^2 + k^2(\lambda^2+\ell^2)^3$$
$$= \underline{r^2(1+kr^2)^2} = s(1+ks)^2$$

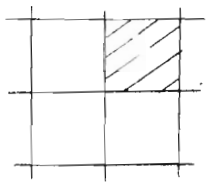
$$\underline{z = r^2(1+kr^2) = s(1+ks)}$$

x, y } квадрик

z равен s

2-6- Surfaces de révolution à pôles

Au paragraphe 2-5-4 on a trouvé une surface de révolution.
Cela semble être la seule ; mais pour atteindre les autres formes; il faut plus de finesse. On ne considère que la partie hachurée.



On a pris les sens-pôles, on a le λ et le ℓ =

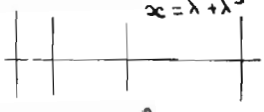
$x = x(\lambda, \ell, \ldots)$ $\quad x = \lambda + h\lambda(\lambda^2+\ell^2)$
$y = y(\lambda, \ell, \ldots)$ $\quad y = \ell + h\ell(\lambda^2+\ell^2)$
$z = z(\lambda, \ell, \ldots)$ $\quad z = \lambda^2 + \ell^2 + K(\lambda^2+\ell^2)^2$

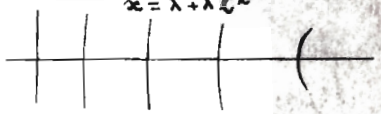
On s'impose la symétrie

avec $\lambda = -\lambda$,

On veut avoir quelque chose de révolution, on va donc retrouver $(\lambda^2+\ell^2)$ la solution devinée est-elle possible ? Prenons $\lambda^2+\ell^2 = s$ s est obligatoirement >0





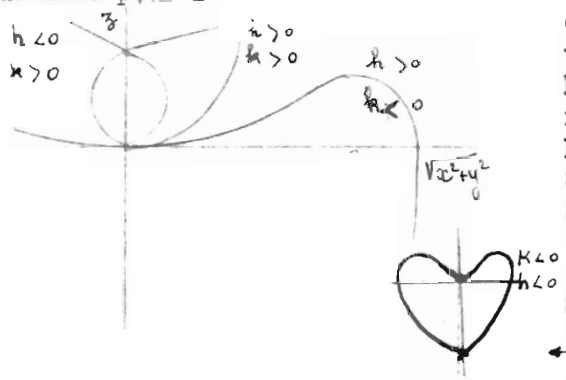


D'où : $x^2 + y^2 = s + 2ks^2 + h^2s^3 = s(1+hs)^2$
$z = s + ks^2$

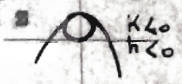
En éléminant s, on n'a plus qu'une fonction en z et (x^2+y^2), c'est donc une surface de révolution.

Formes des méridiennes.

Pour $s = -\frac{1}{h}$, $x^2 + y^2 = 0$ c'est un point de l'axe des (noeud de la surface) de même pour $s = 0$



s va en croissant ; au départ (x^2+y^2) est assez voisin de z, d'où démarrage comme une parabole.
$k < o$ z décroît, à un moment k devient prépondérant sur s et (x^2+y^2) passera par un maxi.
$K > o$ z va grandir très vite.
Si $h \lesssim o$ et $k < o$, on a à peu près n'importe quoi.
Si (x^2+y^2) s'annule avant z



Si (x^2+y^2) s'annule avant z, on obtient

Parmi ces formes possibles, on peut s'attacher à la demi-sphère (erreur maxi $\frac{1}{2048}$ de rayon) et à la sphère (erreur maxi $\frac{1}{52}$ de rayon).

Si le rayon et le fonds sont imposés, le maximum de z est facile à calculer en annulant le dérivée par rapport à z :

$x = a\lambda + h\lambda(\lambda^2+\ell^2)$

$y = a\ell + h\ell(\lambda^2+\ell^2)$

$z = b(\lambda^2+\ell^2) + k(\lambda^2+\ell^2)^2$

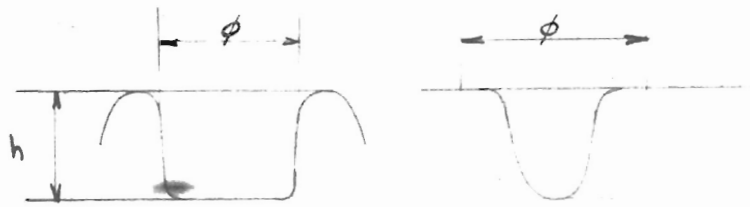
$b + 2ks = o$ d'où $s_0 = -\frac{b}{2k}$ et $z_0 = -\frac{b^2}{2k} + \frac{b^2}{4k} = -\frac{b^2}{4k}$

et $R_0 = -\frac{b}{2k}\left(a - \frac{hb}{2k}\right)^2$

P. 4147 - 50

On a 4 paramètres a,b,h,k et 2 équations. Il y a donc deux paramètres indépendants ; en réalité, un seul a pouvant être pris égal à 1 (mise à l'échelle du paramètre). Donc 1 degré de liberté.
Cette méthode est un moyen de recherche ; on n'a que des sous-pôles et il faut remonter aux pôles. Cest assez pénible.

Par affinité on peut faire b = 1 et il ne reste plus que les paramètres h et k.



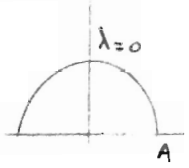
Formes obtenues avec un seul paramètre variable pour même diamètre et même hauteur.

Exemple : étude de la sphère

Avec $\mathfrak{I} = 0$, on a la méridienne dans (z,x) $x = \lambda + h\lambda^3$
$z = 1 + b\lambda^2 + k\lambda^4$ obtenue par une translation.

Le cercle centré à l'origine est : $x^2 + y^2 - 1 = (1+2b)\lambda^2 + (b^2+2k+2h)\lambda^4 + (2kb+h^2)\lambda^6 + k^2\lambda^8$
Arrangeons-nous pour que le polynôme soit un arc de cercle compris entre $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$

$\lambda = 0 \quad x = 0 \quad z = +1$
$\lambda = 1 \quad x = 1 \quad z = +0$ d'où $\left| \begin{array}{l} 1 \overset{?}{=} \\ a + h = 1 \\ 1 + b + k = 0 \end{array} \right.$



On a deux relations et quatre inconnues.
On peut prendre $a^2 + 2b = 0$
(Contact en λ^4, dû à l'osculation)

Le polynôme, étant divisible par $\lambda^2(\lambda^2-1)^2$, à une racine $\lambda = 1$
D'où : $(b^2 + 2k + 2ah) + (2kb + h^2)\lambda^2 + k^2\lambda^4$ d'où, en identifiant, les coefficients étant proportionnels : (pour avoir un carré)

$$\frac{b^2+2k+2ah}{1} = \frac{2kb+h^2}{-2} = \frac{k^2}{1}$$

d'où : $\underbrace{2kb + h^2 + 2b^2}_{-2b} + 4k + 4ah = 0$

$b^2 + 2k + 2ah = k^2$
$b^2 - k^2 = 2k + 2ah$
$b^2 + 2k + 2h - 2h^2$

$-2b + 4k + 4ah + h^2 = 0$
$a^2 + 4ah + h^2 + ak = 0$
$\underbrace{(a+h)^2}_{1} + 2ah + 4k = 0$
$1 + 2ah + 4k = 0$

$(b+k)^2 - b^2 - k^2 + h^2$

$$\frac{1 - b^2 - k^2 + h^2}{-2} = \frac{b^2 + 2k + 2ah}{1}$$

$1 - b^2 - k^2 + h^2 = -2b^2 - 4k - 4ah$
$b^2 - 2k - 1 + 2kb + h^2 = -k^2$ $\quad (b+h)^2 - b^2 - b^2 + 2 \ldots - 2k + h^2 = -k^2$

En retranchant de $b^2 + 2k + ah$ il vient $b^2 - 2k - 1$
$2k^2 + 2kb + h^2 = 0$ D'où $-2k + h^2 = 0$ d'où $4k = 2h^2 \rightarrow 2h^2 + 2ah + 1 \neq 2h + 1 = 0$ D'où $h = -\frac{1}{2}$
et par suite $k = \frac{1}{8}$ $a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{9}{8}$

Vérification : $\left.\begin{array}{l} 1 + b + k = 0 \\ a + h = 0 \\ a^2 + 2b = 0 \end{array}\right\}$ ce qui est vérifié

On est tangent sur l'axe horizontal et surosculeteur sur l'axe vertical.
Par suite :

$x = \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{2}\lambda^3$

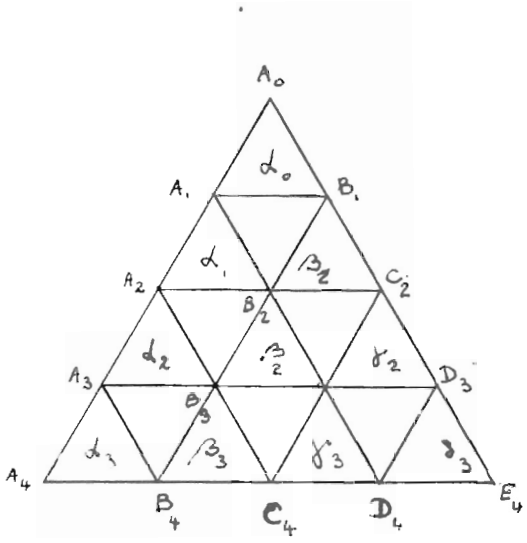
$z = 1 - \frac{9}{8}\lambda^2 + \frac{1}{8}\lambda^4$

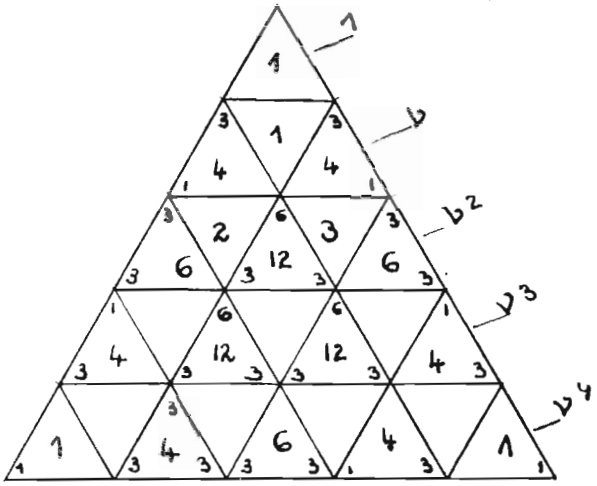
$x^2 + z^2 - 1 = \frac{1}{64}(\lambda^4 - \lambda^2)^2$

dont le minimum est : $\left[\lambda^2(\lambda^2-1)\right]^2$ pour $\xi = \frac{1}{2}$ $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{16} = \frac{1}{1024}$

ou $\xi(\xi - 1)$

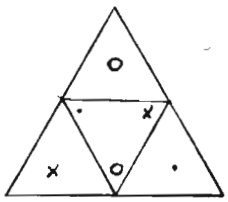
L'erreur maximum sur la 1/2 sphère est $\frac{1}{1024}$ par rapport au rayon 1 : $\overline{OM}^2 - 1 = 1024$
$OM \# 1 + \frac{1}{2048}$





$A_0 = \alpha_0$

$$\left|\begin{array}{l} 4A_1 = \alpha_0 + 3\alpha_1 \\ 4B_1 = \alpha_0 + 3\beta_1 \end{array}\right.$$

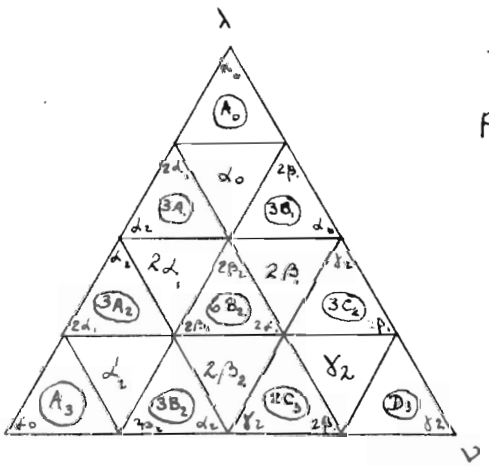


$$\left\{\begin{array}{l} A_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 4B_2 = \alpha_1 + \beta_1 + 2\beta_2 \\ 2C_2 = \beta_1 + \gamma_2 \end{array}\right\} \text{ en divisant par 3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4A_3 = 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 4\beta_3 = \alpha_2 + 2\beta_2 + \beta_3 \\ 4C_3 = 2\beta_2 + \gamma_2 + \gamma_3 \end{array}\right\} \text{ en divisant par 3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_4 = \alpha_3 \\ 4B_4 = \alpha_3 + 3\beta_3 \\ 2C_4 = \beta_3 + \gamma_2 \\ 4D_4 = 3\gamma_2 + \delta_3 \\ E_4 = \delta_3 \end{array}\right\} \text{ en divisant par 3}$$

23-4-2. Elévation de degré de 2 à 3 voir Seite §42 !



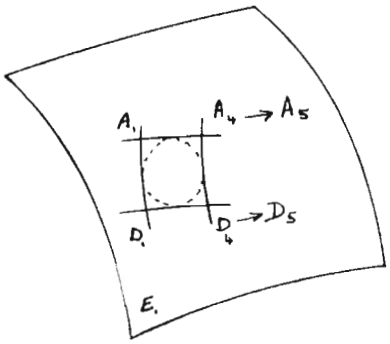
Il reste à identifier avec les coefficients que l'on aurait dû trouver pour A, B, C et D

$A_0 = \alpha_0$
$3A_1 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2$
$3B_1 = 3\beta_1 + \alpha_0$

on a une série de barycentres

P. 4147. 54

2-7- Raccordements sur surfaces de carrosseries.



On connaît un contour curviligne inscrit dans un rectangle de paramètres, dont on a pu trouver les sous-pôles A,....D. On veut faire un raccord le long d'un cercle et qui soit tangent à la première surface.
Il faut donc augmenter le degré du cercle, pour le porter au 4° degré, d'où l'élévation du nombre des sous-pôles.
On rajoute, à chaque pôle, une petite translation, dans le plan, proportionnelles aux nombres du tableau, dans une direction quelconque. Il n'y a qu'un paramètre à notre disposition, la hauteur de la verrue (déterminée par le point central + 1).

2-7-1- Cas d'une courbe $(x^4 + y^4)$

On peut faire une bosse : on aura 2 marques au fraisage. Par contre, on peut voir dans quelle direction on travaillera. On étudiera d'abord le raccord avec un plan par un arc de parabole, qui jouit de la propriété de raccordement en pôles. Il semble que l'on pourra imaginer, dans le plan image des paramètres, une zone de transition, en faisant un espace de barycentres entre les pôles (1) et les pôles (2) avec la fonction : $f = \mu \cdot \lambda^2 + (m-L)^2 - 1$
avec $-h < f < h$.

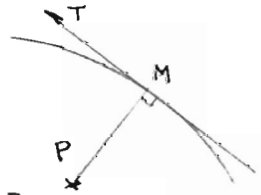
Dans la zone de transition, h joue le rôle de barycentre.

p. ex : $\dfrac{(h - f)\,P + (h+f)\,P}{2\,h}$ $\quad$ $f = +h$, on a la surface (2)
$\quad$ $f = -h$, on a la surface (1)

et peut être un terme quadratique.
En pratique, le calcul se ferait sur les coordonnées.

2-7-2- Découpage, sur une surface à pôles, d'une parallèle à un bord

Il suffit de connaître la distance en vraie grandeur, d'un point de la surface à la courbe à pôles de contour. On cherchera la tangente telle que le vecteur PM soit perpendiculaire à la tangente et en calculer PM.



On utilisera des coupes préférentielles faites à paramètres constants en la variation, dans la figure des paramètres (p. ex : 3 points et arc de parabole).
L'ellipse de Lissajou $x^2 + xy + y^2 - 0,75 = 0$ a 6 points remarquables et leurs tangentes faciles à obtenir.

Remarques

- Ne jamais prendre 2 pôles trop voisins vers les angles, car il y a danger de point de rebroussement.
- Un angle faible entre deux droites présente un danger ; le plan tangent va tourner très vite et la fraise ne voudra pas suivre.

cas d'une courbe (x^4+y^4)



a) cas d'une bosse

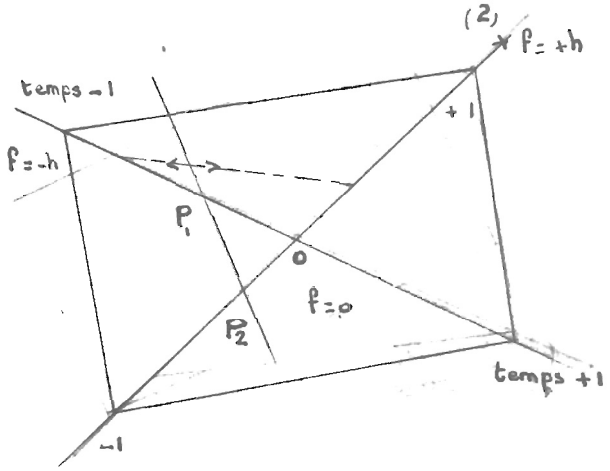


c) zone de transition

b) arc de parabole

P. 4147. 53

2-7-3- Raccordement entre 2 surfaces à pôles qui se coupent



Dans le cas de deux droites, on aurait une parabole par division en tiers. Considérons les diagonales du parallélogramme divisées au tiers? Le point de raccordement est sur la droite joignant les points P_1 et P_2 cherchons les barycentres :

$\theta = h/h$

$$\frac{-(1-\theta)^2 \cdot P_1 + (1+\theta)^2 \cdot P_2}{4\theta}$$

pour $\theta = -1$, on est sur (1)
pour $\theta = +1$, on est sur (2)
pour $\theta = 0$, on a $\frac{P_2 - P_1}{0} = \frac{0}{0}$

seule façon de passer par le point O.

On retrouve la parabole, pour $\theta = 1$ on a les tangentes.
Pour f = -h, on sur (1), d'où :

$$\frac{(f+h)^2 P_2 - (f-h)^2 P_1}{4fh}$$

On a donc un point de raccordement de la parabole raccordant 2 droites $\lambda\mu$ et $(\mathbb{L},m)$ se retrouvent dans f et dans P.

Remarques : Il n'est pas obligatoire d'avoir + h et - h.

2-7-4- Raccordement des surfaces triangulaires.

On sait que : $(\mu + \lambda + \nu)^m$ et que l'on a des termes : coefficient $\times \lambda^2 \mu \nu$...
d'où les pôles en nombre égal aux coefficients différents.

Un raccordement tangentiel double le long du contour est pratiquement impossible, car il faut maintenir constantes les deux premières lignes de pôles, et il ne reste plus rien à faire varier. On peut avoir un contour commun, mais pas de tangence.

2-7-4-1- Coordonnées trilinéaires:

On va se placer en coordonnées trilinéaires, définies par les distances aux trois côtés du triangle, comptées perpendiculairement aux côtés ou parallèlement aux axes.

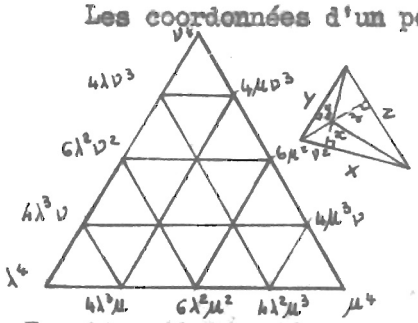
2-7-4-2 Equation d'une droite

Les coordonnées d'un point dans l'équation d'une droite donnent la distance du point à la droite.

$X = x\cos\theta + y\cos\theta - p$

et $X + Y + Z = 1 = 2S$
S = surface du triangle

$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \beta X \\ \beta Y \\ \beta Z \end{vmatrix}$ représent le même point.



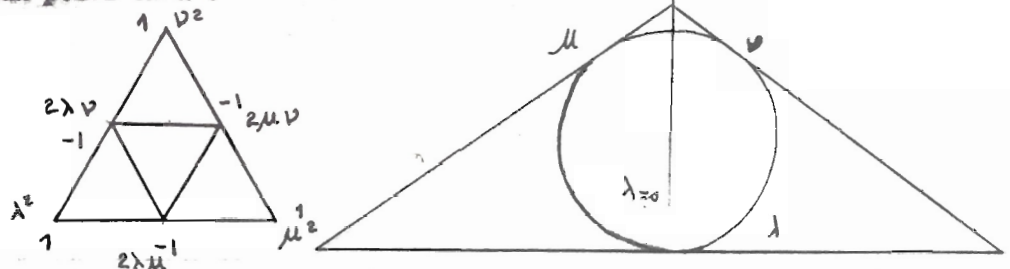
2-7-4-3 Equation d'un cercle :

L'équation du cercle centré est assez facile à obtenir, par suite des symétries ; c'est : $(X^2 + Y^2 + Z^2) + \alpha(XY + YZ + ZX) = 0$
Si $X^2 + Y^2 + Z^2 =$ — on a le cercle circonscrit au triangle.
Lorsque Y = Z et X = 0, on aura une racine double, d'où $\alpha = -2$
D'où l'équation du cercle inscrit au triangle :

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2(\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) = 0$$

P. 4147 - 54

Si ce cercle est dans le plan horizontal on suppose $z = c^{te}$
Par rapport aux pôles on a :

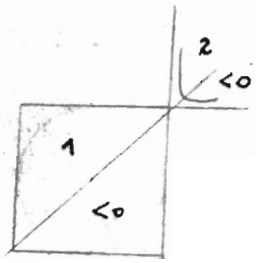


Si les pôles centraux en z sont à la même cote, on a une surface de révolution du second degré d'axe vertical:paraboloïde.
Dans les surfaces triangulaires, il n'y a pas de termes dont les degrés s'ajoutent c'est toujours le second degré pour tous les termes, et, les équations étant homogènes au départ, on a les pôles tout de suite.

2-7-4-4- Equivalente triangulaire de $x^4 + y^4 = 1$

On a un cercle $(x2+2y-1)^2$, d'où facilité d'avoir un méplat.
Ajoutons deux fois l'équation du carré $-(x^2-1)(y^2-1)$, il vient :
$(x^2+y^2-1)^2 - 2(x^2-1)(y^2-1) = 0$
D'où : $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \quad 2x^2 - 2y^2 \quad 1$

$$\frac{-2x^2y^2}{x^4+y^4} \qquad \frac{2x^2+2y^2}{0} \quad \frac{-2}{0} \quad \frac{}{-1} \qquad \text{d'où : } x^4+y^4-1$$



Avec un coefficient autre que 2, on aura une autre branche extérieure au carré, en l'augmentant, on va se rapprocher du carré.

Pour le triangle, on va prendre le cercle 2 fois et on ajoutera le produit des tiers côtés d'un côefficient près, on aura un méplat :

$$\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\lambda\mu-2\mu\nu-2\nu\lambda\right]^2+\alpha(\lambda\mu\nu)(\lambda+\mu+\nu)=0$$

↓ pour maintenir l'homogénéité.

Si α est petit, on est près du cercle
Si α est grand, on est près du triangle

Cherchons les valeurs de α qui sont utiles.
Si $\mu = \nu$, cherchons s'il y a une courbe à l'extérieur du triangle.

$$(\lambda^2-4\lambda\mu^2)+\alpha\lambda\mu^2(\lambda+2\mu)=0$$

$$\lambda^4-8\lambda^3\mu+16\lambda^2\mu^2+\alpha\lambda^2\mu^2+2\alpha\lambda\mu^3=0$$

$$\lambda^3-8\lambda^2\mu+(16+\alpha)\lambda^2\mu^2+2\alpha\mu^3=0$$

Si $\lambda, \mu, \nu > 0$ on est intérieur au triangle
Si l'un des paramètres est <0, on est estérieur au triangle.
On a déjà la racine $\lambda = 0$, d'où, en supposant $\mu = 1$:

$$\rightarrow \lambda^3-8\lambda^2+(16+\alpha)\lambda^2+2\alpha=0$$

Vérifions s'il peut y avoir des racines doubles
La dérivée est : $3\lambda^2-16\lambda+(16+\alpha)=0$
la dérivée par rapport à est $-8\lambda^2+(32+2\alpha)\mu+6\alpha=0$

La racine commune à ces deux équations montre qu'on a une boucle extérieure.

D'où : $\lambda^2 = \lambda = 1$

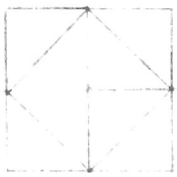
$$-96\alpha-2(16+\alpha)^2 \quad -8(16+\alpha)-18\alpha \quad 6(16+\alpha)-128$$

Le carré du plus grand dénominateur est égal au produit des deux autres

$$(128-26\alpha)^2 = (32-6\alpha)(2\alpha^2+16\alpha+512)$$, d'où la valeur de α

P. 4147 - 55

2-7-4-5- Cas de $X^2+Y^2+X^2Y^2=0$



$(X^2+1)(Y^2+1)=2 \longrightarrow Y^2=\frac{2}{X^2+1}-1$

$X^2+1 \geqslant 0 \longrightarrow 2 > X^2+1$ et $X^2<1$

$X=Y$, d'où : $X^2+1=\sqrt{2}$ soit $X^2=\sqrt{2-1}$, soit $X^2 0,6$

On obtient le carré de côtés parallèles aux diagonales du premier. Pour l'avoir dans le carré (-1, +1), il faut faire la transformation : $x \longrightarrow \mu-\lambda$

$y \longrightarrow \mu-\ell$

et identifier.

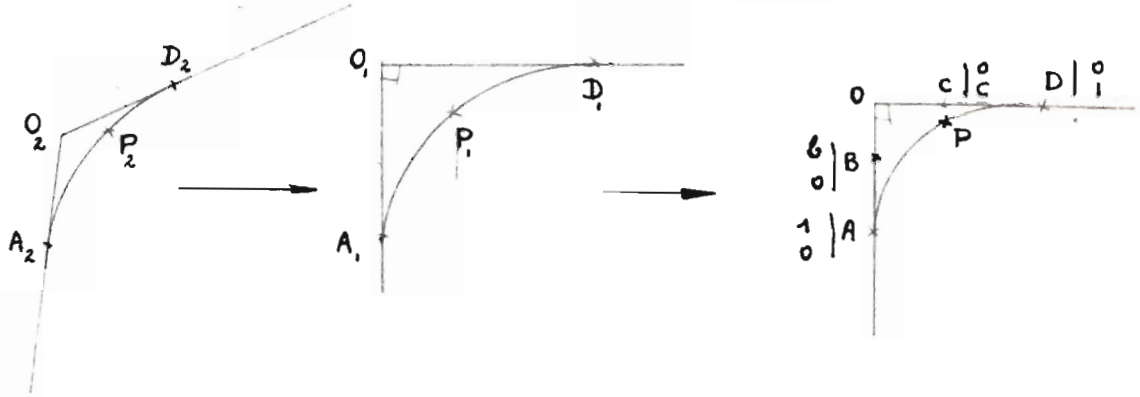
μ	0	1
λ	1	0

$\mu-\lambda=-1+1$ courbe ∞

I.4147-56

- Construction des cubiques planes au moyen d'abaque -

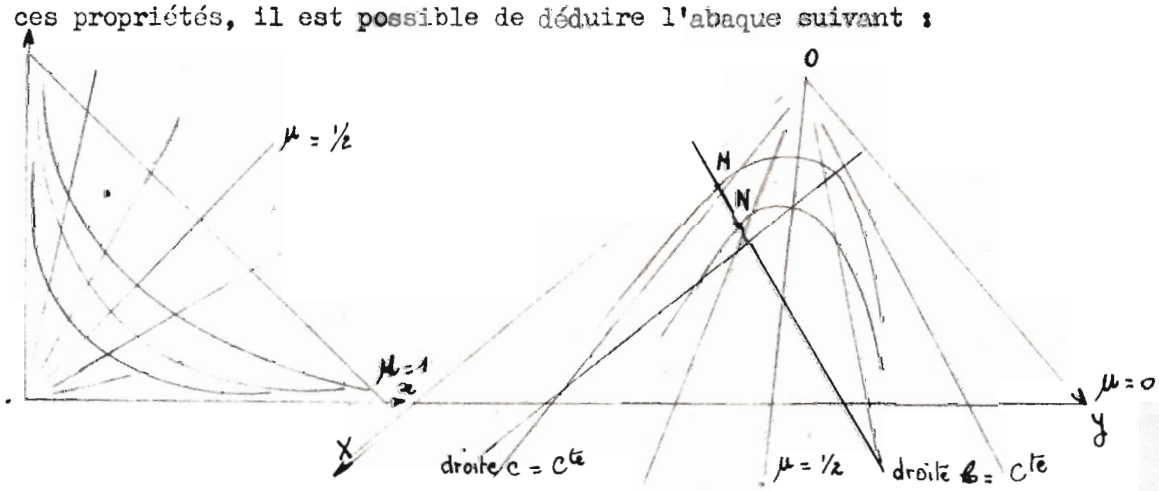
Etant donnée une courbe dans un système d'axes quelconques, formées par les tangentes aux extrémités de la courbe, on ramène cette courbe dans un système d'axes rectangulaires ; puis, par une affinité, on se ramène au cas où DA = OD = 1



L'équation de la cubique : $P = \mu^3 A + 3\mu^2(1-\mu) B + 3\mu(1-\mu)^2 C + (1-\mu)^3 D$
s'écrira :

$$\begin{cases} x_p = \mu^3 + 3\mu^2(1-\mu)\, b \\ y_p = 3\mu(1-\mu)^2 C + (1-\mu)^3 \end{cases}$$

Si l'on fait $\mu = C^{te}$, quand b et c varient, P décrit une droite.
Si l'on fait $b = c = C^{te}$, quand μ varie, P décrit une cubique.
Pour b = c = 1, cette cubique devient la droite x + y = 1, d'où : le réseau de courbes $b = c = C^{te}$ et le réseau de droites $\mu = C^{te}$
De ces propriétés, il est possible de déduire l'abaque suivant :



Soit P un point de l'abaque, obtenu à partir d'un point de la courbe tracée par le dessinateur, en faisant les transformations indiquées précédemment.

Pour une valeur quelconque $\mu = C^{te}$, si $c = C^{te}$ et qui le soit variable, P décrit une droite parallèle à OX de même, pour une valeur quelconque $\mu = C^{te}$, si $b = C^{te}$ et que c soit variable, P décrit une droite parallèle à Oy. Ces deux droites coupent les droites $\mu = C^{te}$ en des points M et N, qui se trouvent sur des cubiques b = c = Cte. De même, le point N, donne une valeur de c.

On a donc :

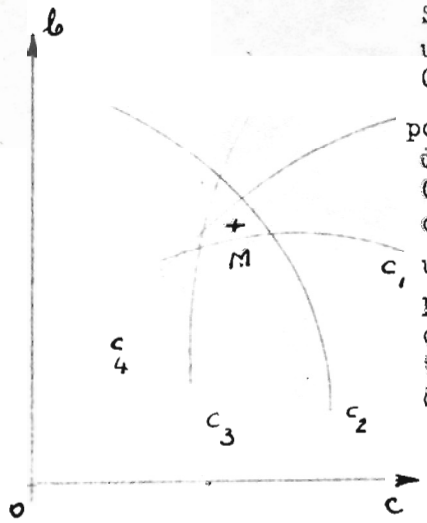
μ	=	obtenu par la droite MN = t = Cte
b	=	obtenu par la cubique b = c = Cte passant par M.
c	=	obtenu par la cubique b = c = Cte passant par N.

Les droites b = Cte et c = Cte coupent les droites μ = Cte en des points M',N',M",N"....

On obtient donc, pour différentes valeurs de μ, des couples de valeurs différentes pour b et c. On peut donc tracer la courbe $b(\mu)$, $c(\mu)$ correspondant au point P.

P. 4147 . 57

La même construction sera faite pour d'autres points P de la courbe, ce qui donne une série de courbes C_1, C_2....



Si la courbe tracée par le dessinateur était une vraie cubique, toutes les courbes C_1, C_2, C_3.... se seraient coupées en un seul point de coordonnées b et c, définissant les deux pôles de la cubique.
Comme cette courbe n'est pas exactement une cubique, les courbes C_1,C_2 .....localisent une région permettant la détermination assez précise d'un point M, de coordonnées b et c, qui définit les pôles d'une cubique passant très près de la courbe donnée par le dessinateur.

P.4147-58