Soleau 40.040

L'objet de cette étude a pour but d'améliorer les procédés de calcul des pièces usinées par méthodes numériques. Rappelons brièvement qu'il faut prédéterminer par le calcul le trajet imposé à la fraise (ou à tout autre outil). Le centre d'outil décrit un polygone dont le côté élémentaire peut avoir un millimètre de long. Trois qualités sont à rechercher pour obtenir un calcul rentable : l'efficacité - la rapidité - la précision.

Toute forme n'est pas, à l'heure actuelle, susceptible d'un calcul commode, il est prudent de délimiter le champ d'action raisonnable de la méthode, quitte à l'étendre par la suite. D'ores et déjà il semble utopique de vouloir tracer une courbe "qui file" à partir de points faux. Dans ce but, une autre méthode de tracé des courbes par points a été créée pour satisfaire aux besoins de la pratique; elle apparaît déjà si intéressante par elle-même qu'elle pourrait s'imposer même sans le support de la méthode de calcul.

D'autre part le prix de revient est directement lié au temps de calcul ce qui interdit à priori toute méthode utilisant des procédés simples en apparence, mais utilisant de trop longs développements dès qu'on aborde les calculs pratiques. On peut d'ailleurs regretter ce point, qui oblige à se restreindre à des cas élémentaires, alors qu'il serait souhaitable, lors de la définition d'une pièce de revenir aux lois de la physique, de la mécanique ou de l'élasticité statique et dynamique. Il est vrai qu'on est rapidement limité dans cette voie, la solution "exacte" d'un problème n'est connue que dans les cas les plus simples, et encore en faisant appel à des notions aussi compliquées qu'intégrales elliptiques, théorie des surfaces minima, des fonctions harmoniques, etc ....

Société Anonyme A. CITROËN
Reproduction interdite
N° 231 - 5.000 11 57 - MM

P2108_1

Observations

Nous n'avons pas, toutefois, voulu sacrifier la précision à la vitesse et chaque fois que c'est possible nous avons étudié la meilleure façon de traiter un problème. Quelquefois une méthode d'approximations successives, approchée en théorie, peut être plus rapide et même plus précise que la méthode réputée rigoureuse.

Après avoir passé en revue ces moyens, on peut trouver des domaines de réalisation pratique avantageux. Ce ne sont pas toujours les plus simples en apparence, soit qu'on n'a pas encore su s'adapter au problème, et il ne reste plus qu'à découvrir la bonne façon d'aborder le problème; soit que la conclusion s'impose, le problème est mal posé et il faut rechercher le remède ailleurs. Et au lieu d'adapter le calcul aux besoins, il faudra au contraire adapter les besoins au calcul.

Les premiers résultats acquis dans le domaine ont mis en relief quelques chapîtres intéressants des mathématiques. Après avoir constaté qu'il doit être possible de faire mieux qu'un calcul séparé pour chacun des points d'une courbe, on a pu mettre au point une technique se rapprochant assez de la notion de différentielle et utilisant les ressources de la récurrence pour des courbes paramétriques. Ce dernier point est assez important car du mode de définition du paramètre dépend directement le volume des calculs, même si la logique demandait de lier ce mode de représentation paramétrique à un élément plus tangible (longueur d'arc de la courbe, tolérance, temps ...). En pratique de ce choix dépend le nombre de vecteurs.

Le problème le plus ardu étant la définition de courbes ou surfaces, si on exclut les plus simples, nous verrons dans ce qui suit une application très intéressante de la notion de barycentre, qui permet sans doute de fixer mathématiquement des formes jusque-là régies par l'esthétique.

Observations

Reproduction interdite
Société Anonyme A. CITROËN
N° 231-5.000 11 57 - MM

Enfin un peu en dehors de ces différents points, nous verrons une application intéressante de la théorie des surfaces: comment réaliser mécaniquement en un point les deux courbures principales que prévoit la théorie générale. Jusque là il était très malaisé de définir avec précision autre chose que les surfaces réglées ou les surfaces de révolution. Encore à l'état embryonnaire, cette étude semble s'annoncer assez fructueuse, à condition de trouver le moyen d'aborder le problème ; en fait c'est une difficulté de conception pour apprendre à l'utilisateur normal à se représenter une surface sans utiliser les moyens classiques de relevé de points sur une maquette.

Société Anonyme A. CITROËN
Reproduction interdite
N° 231 - 5 000 11 57 - MM

Observations

La liberté d'action maximum est obtenue pour le tracé d'une courbe quand chaque élément x, y, z, etc ... est défini au moyen d'un paramètre t, qui n'est ni x, ni y, ni le temps mais qui conduit à des calculs simples.

Ainsi tout élément tel que x est une fonction de t

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

Quelles sont les fonctions f simples à calculer.

Ier CAS - POLYNOMES DE DEGRE n SIMPLE

$$P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots a_0$$

n peut être limité au troisième degré. Pour un accroissement h de la variable t il est facile de voir, en appliquant la formule de Taylor par exemple, que :

$$P_n\left(t+\frac{h}{2}\right) - P_n\left(t-\frac{h}{2}\right) = h P_n'(t) + \frac{h^3}{2^2 3!} P_n'''(t) + \dots \frac{h^{2q+1}}{2^{2q}(2q+1)!} P_n^{2q+1}(t)$$

Ce qu'on notera : $\Delta 1(t,h) = h\, Q_{n-1}(t)$

$Q(n-1)$ Polynôme de degré $(n-1)$

De même $\Delta 2(t,h) = h\left[Q_{n-1}\left(t+\frac{h}{2}\right) - Q_{n-1}\left(t-\frac{h}{2}\right)\right] = h^2 R_{n-r}(t)$

On arrive ainsi à montrer que : $\Delta n(t,h) = \text{cte}$

On ramène ainsi le calcul d'un point à une succession d'additions.

$P(t_0)$

$\Delta 1(t_{1/2})$

$P(t_1)$ $\quad \Delta 2(t_1)$

$\Delta 1(t_{3/2})$ $\quad \Delta 3(t_{3/2}) = K$

$P(t_2)$ $\quad \Delta 2(t_2)$ $\quad \Delta 3(t_{5/2}) = K$ } c'est-à-dire que la différence

$\Delta 1(t_{5/2})$ finie d'ordre $n=3$ est constante

$P(t_3)$ $\quad \Delta 2(t_3)$

$\Delta 1(t_{7/2})$

$P(t_4)$

P2108_ 4

Observations

Reproduction interdite
Société Anonyme A. CITROËN
N° 231 - 5.000 11 57 - MM

Nº 231 - 5.000 11 57 - MM
Société Anonyme A. CITROËN

Connaissant $P(t_0)$ $\Delta_1(t\,1/2)$ $\Delta_2(t_1)$ $\Delta_3(t\,3/2) = K$ si on se place dans le cas du polynôme de troisième degré, on déduit successivement :

$$P(t_1) = P(t_0) + \Delta_1(t\,1/2)$$
$$\Delta_1(t\,3/2) = \Delta_1(t\,1/2) + \Delta_2(t_1)$$
$$\Delta_2(t_2) = \Delta_2(t_1) + K.$$
$$P(t_2) = P(t_1) + \Delta_2(t\,3/2)$$
etc .....

L'utilisation rationnelle des mémoires d'une machine permet au besoin d'automatiser cette technique. C'est en particulier une des raisons de l'intérêt pratique.

2ème CAS - FONCTIONS CIRCULAIRES ET HYPERBOLIQUES

Ecrivons les formules connues :

$$\sin(t+h) + \sin(t-h) = 2 \sin t \cos h.$$
$$\cos(t+h) + \cos(t-h) = 2 \cos t \cos h.$$

et nous remarquons aussitôt que si $f(t) = a \cos t + b \sin t$ on a :

$$\Delta_2(t,h) = f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) = -2(1-\cos h) f(t) = -K f(t).$$

Cette relation $\Delta_2 f = -Kf$ est à rapprocher de la théorie des équations différentielles, $f'' = -Kf$, ce qui invite à généraliser la méthode au calcul des fonctions $ch\,x$, $sh\,x$, e^x, on démontre facilement que si

$$f(t) = a\,ch\,t + b\,sh\,t \text{ il vient}$$
$$\Delta_2(t,h) = 2(ch\,h - 1) f(t) = K f(t).$$

On poursuit comme dans le cas du polynôme, avec le même intérêt pratique d'utilisation des mémoires machine en calcul récurrent.

CALCUL D'ERREUR -

Quand on calcule une fonction par ce procédé, qu'on serait tenté de généraliser pour toute fonction définie par une équation différentielle $f(y, y', y'' \ldots) = 0$, on a 2 types

Reproduction interdite

P2108_5

Observations

d'erreurs :

L'erreur sur les Constantes, arrondies bien sûr, qui cumule ce qui "quantifie" les fonctions étudiées. Ceci revient à choisir un terme $K = 1 - \cos h$ arrondi pour x et y dans le cas d'un cercle, on fera un polygône régulier inscrit certes mais son côté défini par l'angle h ne sera pas tout à fait ce qu'on souhaitait. Ce qui serait gênant si on calculait des tables de fonctions, ne l'est plus si on trace des courbes.

L'erreur d'arrondi sur chaque opération

L'erreur sur (Kf) que l'on note $\delta(K,f)$ vaut :

$\delta(K,f) = K\,\delta f + f\,\delta K$ on vient de dire que le second terme peut être négligé, car agissant simultanément sur x, y, z, dans les cas pratiques, il reste $K\,\delta f$.

Dans le tableau de calcul, il vient en appelant ε_1 $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_4$ les erreurs commises sur la multiplication, les valeurs obtenues sont affectées d'erreurs connues. Et comme en pratique $K\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ on n'en parle pas.

f_0

$\Delta f_{1/2}$

f_1 $\qquad$ $Kf_1 + \varepsilon_1$

$\Delta f_{3/2} + \varepsilon_1$

$f_2 + \varepsilon_1$ $\qquad$ $K(f_2 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2$

$\Delta f_{5/2} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$f_3 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ $\qquad$ $Kf_3 + \varepsilon_3$

$\Delta f_{7/2} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$f_4 + 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$$f_n + (n-1)\varepsilon_1 + (n-2)\varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_{n-1}$$

En fait ε_1 représente une erreur d'arrondi $|\varepsilon_n| < |\varepsilon|$ Exemple $\frac{1}{2}\,10^{-6}$ si on fait le calcul avec 6 chiffres.

L'erreur sur f_n.

$$\eta_n = (n-1)\varepsilon_1 + (n-2)\varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_{n-1} < [(n-1) + (n-2) + \ldots 1]\,|\varepsilon|$$

$$\eta_n \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\,|\varepsilon|$$

P2108_6

Observations

Reproduction interdite
Société Anonyme A. CITROËN
N° 231 - 5.000 - 11 57 - MM

L'erreur probable est donnée d'une façon assez approchée par la formule :

$$[\eta_n]^2 = (n-1)^2[\varepsilon_1^2] + (n-2)^2[\varepsilon_2^2] + \dots [\varepsilon_{n-1}^2]$$

avec $[\varepsilon_1^2]$ = valeur moyenne de ε_1^2 qu'on peut prendre égale à $\frac{1}{4}(\varepsilon_1^2)^2$:

$$[\eta_n^2] = \frac{1}{24}(n-1)(n)(2n-1)\,\varepsilon^2$$

$$[\eta_n] = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{6}}\sqrt{n(n-1)(2n-1)} \# \frac{\varepsilon}{\sqrt{12}}\sqrt{n^3}$$

AMELIORATION DE LA PRECISION -

En modifiant un peu la technique précédente, on peut calculer avec une précision meilleure :

$$x_{2p} = \cos(t_0 + 2ph)$$

$$y_{2p+1} = \sin(t_0 + (2p+1)h)$$

connaissant $x = \cos t_0$ et $y = \sin(t_0 + h)$

en effet $x_{2p+2} - x_{2p} = -2\,y_{2p+1}\sin h = -K\,y_{2p+1}$

$$y_{2p+1} - y_{2p-1} = 2\,x_{2p}\sin h = K\,x_{2p+1}$$

Si on donne à K ; (c'est-à-dire à h), une valeur simple 10^{-6} par exemple, la multiplication se réduit à une addition et on peut ainsi concevoir un générateur de fonction $\sin t$ et $\cos t$ beaucoup plus précis car les erreurs n'interviennent que sur les différences premières.

On aurait $\eta_n \leqslant n|\varepsilon|$

et $[\eta_n] = \frac{1}{2}\sqrt{n}\,|\varepsilon|$

En prélevant les retenues à un rang quelconque, on a un générateur de puls donnant les fonctions Circulaires ou Hyperboliques construit dans n'importe quel système de numération, impair de préférence, ou même décimal mais arrondi tantôt par défaut, tantôt par excès à 5.

P 2108_7

Observations

Reproduction interdite
Société Anonyme A. CITROËN
N° 231 - 5.000 - 11 57 - MM

On verrait comme logique un générateur faisant 0,01 mm. par puls , le côté du polygône étant de l'ordre de 3 μ ce qui ferait que jamais l'erreur ne dépasserait 0,01 mm. par rapport à la courbe progressive.

Cette méthode s'applique sans difficultés aux courbes Hyperboliques et à l'exponentielle, il suffit de changer un signe aux relations obtenues. Or la chaînette et l'exponentielle sont d'un usage fréquent en mécanique.

Société Anonyme A. CITROËN
Reproduction interdite

Observations

TRACÉ DE COURBES PAR POINTS
(Méthode barycentrique)

Les courbes unicursales de degré n, où $x\,y\,z$ sont représentées par des polynômes de la variable t, peuvent être construites par construction géométrique assez ingénieuse. Nous l'exposons ici pour les courbes du 3° degré, mais il est évident que la construction s'étend à n'importe quel nombre de points.

Pour simplifier, nous emploierons la notation suivante : $G=\frac{pA+qB}{p+q}$ pour désigner le barycentre de deux points A et B affectés de masses p et q, notation qui exprime que la coordonnée x (y ou z) de G est égale à :

$$(p+q)\,x_G = p\,x_A + q\,x_B$$

On part de la figure formée par 4 points A, B, C, D et on construit successivement :

$$G=\frac{pA+qB}{p+q} \qquad H=\frac{pB+qC}{p+q} \qquad K=\frac{pC+qD}{p+q}$$

$$I=\frac{pG+qH}{p+q} \qquad J=\frac{pH+qK}{p+q}$$

$$M=\frac{pI+qJ}{p+q}$$

La courbe lieu des points M se calcule facilement:

$$M=\frac{p^3A+3p^2qB+3pq^2C+q^3D}{(p+q)^3}$$

Le point M est de construction immédiate si $p=q=\frac{1}{2}$ et ceci permet de trouver un nombre de points en nombre suffisant car il suffit de recommencer la construction à partir des points $AGIM$ ou $MJKD$

La tangente en M est donnée en effet, si on considère $p+q$ = Cte

$$dM=\frac{3p^2A+2pqB+q^2C}{(p+q)^3}\,dp+\frac{3p^2B+2pqC+q^2D}{(p+q)^3}\,dq=3(I-J)\,\frac{dp}{p+q}$$

La courbe est donc tangente à $I\,J$ en M

P2108_9

Observations

Société Anonyme A. CITROËN
N° 231 - 5.000 - 11 57 - MM
Reproduction interdite

Posant $t = \frac{q}{p+q}$ il vient la forme suivante:

$$M = (1-t)^3 A + 3t(1-t)^2 B + 3t^2(1-t)C + t^3 D$$

ou $M = A + 3t\,\overline{AB} + 3t^2(\overline{BC} - \overline{AB}) + t^3(\overline{CD} - 2\overline{BC} + \overline{AB})$

D'où on déduit la valeur du rayon de courbure si H est le pied de la perpendiculaire issue de C sur AB on a :

$$M = A + 3t\,\overline{AB} + 3t^2(\overline{AH} + \overline{HC})$$

d'où $$R_A = \frac{3}{2}\,\frac{AB^2}{HC}$$

Si la courbe est gauche, c'est-à-dire considérée dans l'espace et non dans un plan on voit immédiatement que le plan osculateur en A est ABC. .

Connaissant 2 points, 2 tangentes et 2 plans osculateurs relatifs aux points, il n'y a qu'une courbe de la famille et son tracé est aisé.

Dans le plan, un tâtonnement reste nécessaire pour fixer les points BC sur les tangentes en A et D à l'arc de courbe que l'on souhaite tracer.

GENERALISATION ou cas des surfaces

Une surface peut de la même façon s'écrire sous forme de polynôme à deux variables $x(u,v)$ ou à trois variables homogènes $x(pqr)$

10 points de définition sont nécessaires, le point P étant donné par :

$$(p+q+r)^3 = p^3A + q^3B + r^3C + 3p^2q\,D + 3q^2r\,E + 3r^2p\,F + 3pq^2G + 3qr^2H + 3rp^2I + 6pqrJ$$

en faisant varier p et q de façon que $p+q = \text{Cte}$, $r = \text{Cte}$ on obtient une famille de courbes; on définit ainsi 3 familles $p = \text{Cte}$ $q = \text{Cte}$ $r = \text{Cte}$ par un point de la surface il passe donc 3 courbes simples.

P2108_10

Observations

Société Anonyme A. CITROËN
Reproduction interdite
N° 231 - 5.000 11 57 - MM

TRACÉ DE COURBES PAR POINTS

(Méthode barycentrique)

Le contour peut être défini par une relation entre $p q r$; le plus simple par exemple est $p+q+r = 1, 0<p<1$ de même q et r et on réalise ainsi un triangle gauchi.

L'intérêt de ces courbes ou surfaces est évident. Elles sont affines et ainsi toute projection de la courbe équivaut à la projection des "pôles". Leur forme varie à l'infini. On s'en rend compte facilement: leur forme canonique dans l'espace est:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$

avec un système d'axes obliques convenablement choisi. Par projection plane, on obtient différentes formes avec points doubles ou points d'inflexion.

On obtient une des formes canoniques suivantes, (en axes obliques convenablement choisis) :

$x^2 = y^3 - y^2$	2 points d'inflexion 1 point isolé	1
$x^2 = y^3$	Point de rebroussement. Parabole semi-cubique	2
$x^2 = y^3 + y^2$	Point double avec boucle	3
$x = y^3$	Parabole cubique	4
$x = y^2$	Parabole simple	5

P 2108_11

Observations

Reproduction interdite
Société Anonyme A. CITROËN
N° 231 - 5.000 - 11 57 - MM

L'USINAGE PAR FRAISE TORE

Il est possible de rechercher le meilleur contact entre 2 surfaces de façon à ce qu'elles apparaissent tangentes le long d'une ligne au lieu de l'être en un point. De cette façon on peut réduire notablement le temps d'usinage et améliorer le fini de surface.

Considérons le problème pour une fraise tore engendrée par un cercle de rayon r tournant autour d'un axe distant de R de son centre. On peut se ramener par le jeu des surfaces parallèles de distance r, à placer sur ladite surface parallèle un cercle de rayon R.

Si l'on considère l'indicatrice en un point on se place en un des sommets (sur le petit ou le grand axe, suivant les cas), et on trouve toujours une section parallèle où le rayon de courbure soit égal au rayon du cercle. Le contact étant du quatrième ordre, on peut ainsi améliorer notablement la technique d'usinage en réduisant au maximum le temps de fabrication.

Le problème reste donc un problème de calcul et il est nécessaire d'adapter la méthode de définition des surfaces à ce procédé d'usinage.

Société Anonyme A. CITROËN
Reproduction interdite
N° 231 - 5.000 - 11 57 - MM

Observations