Le direzioni della logica in Italia: la reverse mathematics e l'analisi computazionale

LE DIREZIONI DELLA LOGICA IN ITALIA: LA REVERSE MATHEMATICS E L'ANALISI COMPUTAZIONALE

GUIDO GHERARDI AND ALBERTO MARCONE

Nelle conversazioni tra matematici non è infrequente sentire affermazioni del tipo "i teoremi Φ e Ψ sono equivalenti", oppure "il teorema Φ è più forte del teorema Ψ". Dato che Φ e Ψ (essendo teoremi) sono entrambi dimostrabili, prendendo alla lettera le due affermazioni abbiamo che la prima è banalmente vera e la seconda banalmente falsa. Sappiamo tutti però che queste affermazioni hanno un altro significato, molto meno banale, e c'è quindi una ragione per cui vengono fatte. Per fissare le idee consideriamo un'affermazione del secondo tipo: essa significa che a partire da Φ si può dedurre facilmente (assumendo certe competenze in una certa parte di matematica) Ψ, mentre non sappiamo come dimostrare altrettanto facilmente Φ a partire da Ψ, e anzi qualunque dimostrazione di Φ non usa per nulla Ψ. Queste affermazioni sono dunque certamente dipendenti dal momento storico in cui sono fatte (si può trovare una nuova dimostrazione, e ciò che è considerato difficile oggi potrebbe essere un esercizio di routine tra un secolo). Parrebbe dunque che asserzioni di questo tipo non siano suscettibili di un'analisi matematicamente rigorosa.

Negli ultimi decenni però la logica matematica ha sviluppato alcuni strumenti in grado di rendere precise, e suscettibili di dimostrazione o refutazione, affermazioni come le precedenti. In particolare ci riferiamo alla reverse mathematics e all'analisi computazionale. Questi sono due programmi di ricerca di origine diverse che nell'ultimo decennio, anche grazie al contributo di alcuni ricercatori italiani, hanno trovato significativi punti di contatto.

In questo lavoro presenteremo i due programmi, con particolare riferimento alle loro aree di contatto. Evidenzieremo in particolare i contributi dei ricercatori italiani attivi in queste aree, e concluderemo

Date: 10 ottobre 2017.

La ricerca di Marcone è supportata dal PRIN 2012 "Logica, Modelli e Insiemi."

indicando alcune prospettive di sviluppo su cui anche in Italia si sta cercando di lavorare.

1. Reverse Mathematics

Possiamo definire la reverse mathematics come quella parte della logica e delle ricerche sui fondamenti della matematica che si occupa di stabilire equivalenze tra assiomi e teoremi. Già Aristotele aveva notato che l'equivalenza è un fenomeno diffuso in varie parti della matematica:

> la suddetta conversione [tra conclusione e premesse] si verifica più frequentemente nelle scienze matematiche [che nelle discussioni dialettiche].
>
> (Secondi Analitici, 78a10)

Probabilmente Aristotele aveva in mente equivalenze del tipo "un triangolo ha due lati congruenti se e solo se ha due angoli congruenti". Nella matematica moderna sono però molto diffuse anche le equivalenze tra enunciati, come quella ben nota tra l'assioma della scelta e il lemma di Zorn sulla base della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

L'ambito in cui lavora la reverse mathematics (almeno al suo stadio di sviluppo attuale) è quello dei sottosistemi dell'aritmetica del second'ordine e lo scopo di questo programma di ricerca è quello di stabilire gli assiomi di esistenza di insiemi necessari e sufficienti a dimostrare teoremi della matematica "ordinaria", cioè enunciati che sono formalizzabili nel linguaggio dell'aritmetica del second'ordine. Il linguaggio $\mathcal{L}_2$ dell'aritmetica del second'ordine ha variabili per i numeri naturali (tipicamente scritte in minuscolo), variabili per gli insiemi di numeri naturali (tipicamente scritte in maiuscolo), simboli di costante 0 e 1, simboli di funzione binari per la somma e il prodotto di numeri naturali, simboli per l'uguaglianza e la relazione d'ordine tra numeri naturali e per l'appartenenza di un numero naturale ad un insieme. Un modello per $\mathcal{L}_2$ consta di una parte al prim'ordine, cioè un'interpretazione $\mathfrak{N}$ per i numeri naturali equipaggiati con $+$, $\cdot$ e $<$, ed una parte al second'ordine che consiste di una collezione di sottoinsiemi di $\mathfrak{N}$. Quando la parte al prim'ordine è standard (cioè consiste dei "veri" numeri naturali) parliamo di un ω-modello ed identifichiamo il modello con il sottoinsieme di $\mathcal{P}(\omega)$ che ne forma la parte al second'ordine.

L'aritmetica del second'ordine è la teoria nel linguaggio $\mathcal{L}_2$ che consiste degli assiomi che esprimono il fatto che i numeri naturali formano un semianello commutativo e ordinato con identità (ovvero

gli assiomi di Peano senza l'induzione), dello schema di induzione per formule arbitrarie di $\mathcal{L}_2$ e dello schema di comprensione. Quest'ultimo è composto dalle chiusure universali delle formule del tipo

$$\exists X \, \forall n (n \in X \iff \varphi(n)),$$

dove φ è una $\mathcal{L}_2$-formula in cui X non è libera, ma altre variabili (anche del second'ordine) possono essere libere. In sintesi, lo schema di comprensione asserisce l'esistenza di insiemi di numeri naturali definiti attraverso formule arbitrarie di $\mathcal{L}_2$.

Nei loro fondamentali lavori sui fondamenti della matematica, sia Hermann Weyl [Wey18] che Hilbert e Bernays [HB68, HB70] (le cui prime edizioni risalgono agli anni '30 del XX secolo) avevano già notato che $\mathcal{L}_2$ è sufficientemente ricco da poter esprimere, tramite codifiche appropriate, parti significative della matematica, e che molti teoremi matematici sono dimostrabili nell'aritmetica del second'ordine, o in alcuni suoi frammenti. Infatti Weyl utilizzava una teoria simile a quella che oggi è chiamata ACA_0^+ (un piccolo rafforzamento di ACA_0; entrambe le teorie verranno descritte più avanti).

Negli anni '70 del XX secolo Harvey Friedman iniziò la ricerca sistematica degli assiomi sufficienti e necessari per dimostrare i teoremi della matematica ordinaria (cioè quella non direttamente influenzata dalla teoria degli insiemi). Una delle prime scoperte fatte da Friedman fu che "quando il teorema è dimostrato dagli assiomi corretti, gli assiomi possono venir dimostrati a partire dal teorema" [Fri75, p. 235]. Friedman evidenziò anche il ruolo degli assiomi che asseriscono l'esistenza di insiemi, come lo schema di comprensione, eventualmente ristretto a certe classi di formule. Questo lo portò ben presto a restringere i principi di induzione nei vari frammenti dell'aritmetica del second'ordine da lui individuati. In [Fri76] vennero infatti introdotti il sistema di base RCA_0 e gli oggi ben noti WKL_0, ACA_0, ATR_0, e $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0 (tutti questi sistemi saranno definiti più avanti). Al giorno d'oggi, la maggior parte della ricerca in reverse mathematics confronta la forza di vari teoremi matematici dimostrando equivalenze, implicazioni e non implicazioni in RCA_0.

Il programma iniziato da Friedman è stato portato avanti negli ultimi due decenni del secolo scorso da Steve Simpson e dai suoi studenti (compresi due italiani: Alberto Marcone e Mariagnese Giusto), ed è ampiamente descritto nella monografia di Simpson [Sim09].

Per descrivere RCA_0 e gli altri sottosistemi dell'aritmetica del second'ordine è necessario richiamare le gerarchie utilizzate per classificare le formule di $\mathcal{L}_2$ utilizzando il numero di alternanze di quantificatori. Chiameremo *quantificatori numerici* quelli applicati a variabili del prim'ordine, *insiemistici* quelli applicati a variabili del second'ordine. Le formule senza quantificatori insiemistici e in cui i quantificatori numerici sono limitati sono denotate indifferentemente con $\mathbf{\Sigma}^0_0$ e $\mathbf{\Pi}^0_0$; per $n > 0$ le formule $\mathbf{\Sigma}^0_n$ (rispettivamente $\mathbf{\Pi}^0_n$) hanno quantificatori numerici esistenziali (rispettivamente universali) davanti ad una formula $\mathbf{\Pi}^0_{n-1}$ (rispettivamente $\mathbf{\Sigma}^0_{n-1}$); le formule aritmetiche (denotate sia con $\mathbf{\Sigma}^1_0$ che con $\mathbf{\Pi}^1_0$) sono quelle prive di quantificatori insiemistici; per $n > 0$ le formule $\mathbf{\Sigma}^1_n$ (rispettivamente $\mathbf{\Pi}^1_n$) hanno quantificatori insiemistici esistenziali (rispettivamente universali) davanti ad una formula $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ (rispettivamente $\mathbf{\Sigma}^1_{n-1}$). Una formula è $\mathbf{\Delta}^i_n$ in una certa teoria se è equivalente in quella teoria sia ad una formula $\mathbf{\Sigma}^i_n$ che a una formula $\mathbf{\Pi}^i_n$.

RCA_0 è il sottosistema dell'aritmetica del second'ordine in cui lo schema di induzione e quello di comprensione sono ristretti rispettivamente alle formule $\mathbf{\Sigma}^0_1$ e $\mathbf{\Delta}^0_1$. Gli ω-modelli di RCA_0 sono gli ideali di Turing: sottoinsiemi di $\mathcal{P}(\omega)$ chiusi sotto join e riducibilità di Turing. L'ω-modello minimale di RCA_0 è la collezione degli insiemi computabili.

RCA_0 è sufficiente ad ottenere risultati di base su molte strutture matematiche (per esempio possiamo definire in RCA_0 i vari sistemi numerici) come mostrato dalla seguente collezione di esempi.

Teorema 1. RCA_0 *dimostra ognuna delle seguenti asserzioni:*

(i) L'intersezione di una successione di intervalli chiusi in $\mathbb{R}$*, ognuno incluso nel precedente e la cui lunghezza tende a zero, consiste esattamente di un numero reale.*

(ii) Il teorema della categoria di Baire: l'intersezione numerabile di aperti densi in uno spazio metrico completo e separabile è densa.

(iii) Il teorema del valor medio: se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *è continua e* $f(0) \cdot f(1) < 0$ *allora esiste* $x \in [0,1]$ *tale che* $f(x) = 0$*.*

(iv) Il lemma di estensione di Urysohn-Tietze: se X *è uno spazio metrico completo e separabile,* $C \subseteq X$ *è chiuso e* $f : C \to [0,1]$ *è continua allora esiste* $g : X \to [0,1]$ *continua e tale che* $g(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in C$*.*

(v) *Una forma debole del teorema di completezza di Gödel per insiemi numerabili di formule: ogni insieme numerabile, chiuso per conseguenza logica e coerente di formule del prim'ordine ha un modello numerabile.*

(vi) *Ogni campo numerabile ha una chiusura algebrica.*

(vii) *Il teorema di limitatezza uniforme per operatori sugli spazi di Banach: se un insieme numerabile di operatori lineari limitati tra spazi di Banach è puntualmente limitato allora l'insieme delle norme degli elementi dell'insieme è limitato.*

In ogni caso, RCA_0 è troppo debole per dimostrare la maggior parte dei teoremi matematici. D'altronde il ruolo di RCA_0 è quello di una teoria di base in cui vogliamo studiare le relazioni tra enunciati che, per evitare le banalizzazioni citate nell'introduzione, non devono essere dimostrabili in RCA_0 stessa.

Se un teorema T si può esprimere in $\mathcal{L}_2$ ma non è dimostrabile in RCA_0, la reverse mathematics pone la domanda: qual è l'assioma più debole che possiamo aggiungere a RCA_0 per ottenere una teoria che dimostra T? A priori, ci possiamo attendere che questa domanda abbia una risposta differente per ogni T, ma Harvey Friedman notò che le cose non stanno in questo modo. Infatti la grande maggioranza dei teoremi della matematica ordinaria che si possono esprimere in $\mathcal{L}_2$ ma non sono dimostrabili in RCA_0 risultano essere equivalenti sulla base di RCA_0 ad uno dei seguenti quattro sottosistemi dell'aritmetica del second'ordine che elenchiamo in ordine crescente di forza: WKL_0, ACA_0, ATR_0, and $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0. Numerosi esempi concreti di questo fenomeno sono contenuti nella monografia di Steve Simpson [Sim09]. La terminologia *Big Five*, introdotta da Antonio Montalbán in [Mon11], comunica proprio l'importanza dei cinque sistemi per la classificazione dei teoremi matematici. Abbiamo dunque ottenuto una rappresentazione estremamente elegante, in cui teoremi provenienti dalle più diverse aree della matematica vengono classificati in cinque livelli, che in prima approssimazione corrispondono ai principi matematici fondamentali utilizzati nelle loro dimostrazioni. RCA_0 corrisponde alla matematica computabile, ovvero implementabile tramite un algoritmo, WKL_0 rappresenta un principio di compattezza, ACA_0 è connesso alla compattezza sequenziale, ATR_0 permette l'uso di ragionamenti transfiniti, $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0 comprende principi impredicativi.

Entreremo ora un po' più in dettaglio descrivendo più precisamente

i quattro sottosistemi più forti di RCA_0.

Per ottenere WKL_0 aggiungiamo a RCA_0 l'enunciato del lemma di König debole cioè l'asserzione che ogni albero binario infinito ha una cammino infinito. Questo principio asserisce essenzialmente la compattezza dello spazio di Cantor. Un enunciato equivalente, che più intuitivamente mostra che WKL_0 è più forte di RCA_0 (una dimostrazione rigorosa richiede semplici argomenti di teoria dei modelli e della computabilità), è la $\mathbf{\Sigma}^0_1$-separazione: se $\varphi(n)$ e $\psi(n)$ sono formule $\mathbf{\Sigma}^0_1$ tali che $\forall n \neg(\varphi(n) \wedge \psi(n))$ allora esiste un insieme X tale che $\varphi(n) \implies n \in X$ e $\psi(n) \implies n \notin X$ per ogni n. WKL_0 e RCA_0 sono equiconsistenti con l'Aritmetica Primitiva Ricorsiva, e quindi dal punto di vista della teoria della dimostrazione sono piuttosto deboli. Ciò nonostante WKL_0 dimostra (e spesso risulta essere equivalente a) un buon numero di teoremi matematici classici. Quello che segue è solo un piccolissimo campione di questi risultati.

Teorema 2. *In* RCA_0, WKL_0 *è equivalente ad ognuna delle seguenti asserzioni:*

(i) Il teorema di Heine-Borel: ogni ricoprimento dell'intervallo $[0,1]$ *per mezzo di intervalli aperti ha un sottoricoprimento finito.*

(ii) Ogni funzione continua da $[0,1]$ *in* $\mathbb{R}$ *è uniformemente continua.*

(iii) Il teorema di Cauchy-Peano per l'esistenza locale di soluzioni di un'equazione differenziale.

(iv) Il teorema di Hahn-Banach per spazi di Banach separabili: ogni funzionale limitato f *su un sottospazio di uno spazio di Banach separabile con* $\|f\| \leq 1$ *ha un'estensione* F *all'intero spazio con* $\|F\| \leq 1$.

(v) Ogni anello commutativo numerabile con identità ha un ideale primo.

(vi) Il teorema di completezza di Gödel per insiemi numerabili di formule: ogni insieme numerabile e coerente di formule del prim'ordine ha un modello numerabile.

Gli ω-modelli di WKL_0 sono chiamati ideali di Scott, e la loro intersezione è la collezione degli insiemi computabili. Questo significa che, sebbene WKL_0 asserisca l'esistenza di insiemi non computabili (infatti esistono alberi binari infiniti computabili che non hanno nessun

cammino infinito computabile), essa non dimostra l'esistenza di nessun specifico insieme non computabile.

ACA_0 si ottiene da RCA_0 estendendo lo schema di comprensione alle formule aritmetiche. In questo modo otteniamo un'estensione conservativa dell'aritmetica di Peano, cioè gli enunciati privi di variabili insiemistiche dimostrabili in ACA_0 sono esattamente quelli dimostrabili in PA. Questo implica tra l'altro che ACA_0 e PA sono equiconsistenti.

Dal punto di vista più strettamente matematico, in ACA_0 è possibile sviluppare gran parte della teoria delle funzioni continue sui reali (o più in generale sugli spazi metrici separabili e completi), utilizzando la completezza della retta reale. Inoltre ACA_0 dimostra (e spesso risulta essere equivalente a) molti altri teoremi che riguardano campi, anelli e spazi vettoriali numerabili. Nuovamente, elenchiamo un piccolissimo campione dei risultati noti.

Teorema 3. *In* RCA_0, ACA_0 *è equivalente ad ognuna delle seguenti asserzioni:*

(i) Il teorema di Bolzano-Weierstraß: ogni successione limitata di numeri reali ha una sottosuccessione convergente.

(ii) Il lemma di Ascoli-Arzelà: ogni successione limitata ed equicontinua di funzioni da un intervallo limitato in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente.

(iii) Il teorema di convergenza dominata di Lebesgue per la misura di Lebesgue su $[0,1]$: se (f_n) è una successione di elementi di $L^1([0,1])$, $g \in L^1([0,1])$ domina ogni f_n, e per quasi tutti gli $x \in [0,1]$ la successione $(f_n(x))$ è convergente allora esiste $f \in L^1([0,1])$ tale che (f_n) converge puntualmente a f e $(\int f_n)$ converge a $\int f$.

(iv) Ogni anello commutativo numerabile con identità ha un ideale massimale.

(v) Il teorema di Hahn: ogni gruppo abeliano ordinato è immergibile in un prodotto di copie di $(\mathbb{R}, +)$.

(vi) Il lemma di König: ogni albero infinito e finitamente generato ha un cammino infinito.

(vii) Il teorema di Ramsey per esponente k con $k \geq 3$: per ogni $c : [\mathbb{N}]^k \to \{0, \dots \ell - 1\}$ esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $c \restriction [H]^k$ è costante (qui con $[B]^k$, per $B \subseteq \mathbb{N}$, indichiamo l'insieme dei sottoinsiemi di B con esattamente k elementi).

Gli ω-modelli di ACA_0 sono gli ideali di Turing chiusi sotto il jump, e quindi il più piccolo ω-modello di ACA_0 è la collezione degli insiemi aritmetici.

ATR_0 rafforza ACA_0 permettendo di iterare la comprensione aritmetica lungo qualunque buon ordine. Si ottiene [Sim09, Theorem V.5.1] che, sulla base di RCA_0, ATR_0 è equivalente alla $\mathbf{\Sigma}^1_1$-separazione, che è l'analogo della $\mathbf{\Sigma}^0_1$-separazione descritta a proposito di WKL_0, ma applicata a formule $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Questa teoria raggiunge i limiti estremi del predicativismo e risulta essere equivalente a molti teoremi fondamentali della teoria descrittiva degli insiemi, dell'algebra, della teoria degli ordini parziali e lineari. Le dimostrazioni di questi teoremi ricorrono spesso esplicitamente a costruzioni per ricorsione transfinita sugli ordinali numerabili. Offriamo nuovamente un piccolo campionario di risultati.

Teorema 4. *In* RCA_0, ATR_0 *è equivalente ad ognuna delle seguenti asserzioni:*

(i) Il teorema dell'insieme perfetto: ogni sottoinsieme chiuso e più che numerabile di $\mathbb{R}$ *ha un sottoinsieme perfetto (chiuso e privo di punti isolati) non vuoto.*
(ii) Il teorema di separazione di Lusin: due sottoinsiemi analitici di $\mathbb{R}$ *disgiunti sono separati da un insieme boreliano.*
(iii) Il teorema di Ulm: due p-gruppi abeliani ridotti numerabili che hanno gli stessi invarianti di Ulm sono isomorfi.
(iv) Dati due buoni ordini numerabili uno di essi è immergibile nell'altro.
(v) Il teorema di Hausdorff di classificazione degli ordini lineari numerabili che non contengono nessuna copia di $\mathbb{Q}$.

$\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0 è il più forte dei *Big Five*: si ottiene aggiungendo a RCA_0 lo schema di comprensione per le formule $\mathbf{\Pi}^1_1$. Nuovamente presentiamo alcuni teoremi matematici facilmente enunciabili equivalenti a questa teoria.

Teorema 5. *In* RCA_0, $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0 *è equivalente ad ognuna delle seguenti asserzioni:*

(i) Il teorema di Cantor-Bendixson: ogni sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ *è unione di un insieme numerabile e di un insieme perfetto.*

(ii) Il teorema di Silver: ogni relazione di equivalenza boreliana su $\mathbb{R}$ *che ha una quantità più che numerabile di classi di equivalenza ha un insieme perfetto di elementi non-equivalenti.*

(iii) Ogni gruppo abeliano numerabile è la somma diretta di un gruppo divisibile e di un gruppo ridotto.

(iv) Il teorema di Mal'tsev: ogni gruppo numerabile ordinato ha tipo d'ordine $\mathbb{Z}^\alpha\mathbb{Q}^\varepsilon$ *dove* α *è un ordinale numerabile e* $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

I *Big Five* possono essere fatti corrispondere a diversi approcci ai fondamenti della matematica (per ulteriori approfondimenti si veda [Sim09, §I.12]). Infatti RCA_0 ha tratti in comune con il costruttivismo alla Bishop, WKL_0 può essere considerato (come argomentato in [Sim88b]) una realizzazione (inevitabilmente parziale) del riduzionismo finitista di Hilbert, ACA_0 è il prototipo delle teorie predicative propugnate da Weyl e Feferman, ATR_0 realizza un riduzionismo predicativista, ed infine $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0 è il prototipo delle teorie impredicative studiate da Feferman e altri.

Da un altro punto di vista, guardando gli ω-modelli dei cinque *Big Five* si possono riconoscere alcuni principi fondamentali della teoria della computabilità: l'esistenza degli insiemi computabili e la chiusura sotto l'operazione di join e la Turing riducibilità; il Low Basis Theorem di Jockusch e Soare; la chiusura sotto il jump; la chiusura sotto la riducibilità iperaritmetica (qui la corrispondenza è approssimativa); la chiusura sotto l'iperjump.

Sinora abbiamo descritto la reverse mathematics "classica", imperniata sui *Big Five* e su una classificazione elegante e lineare dei teoremi matematici. Negli ultimi anni è però avvenuto un drastico cambiamento di prospettiva, a partire dal risultato di Seetapun [SS95] che, risolvendo un problema aperto da diversi anni, ha mostrato che il teorema di Ramsey per esponente 2 non è equivalente a nessuno dei *Big Five* (nel Teorema 3 avevamo invece indicato che per esponenti maggiori o uguali a 3 il teorema di Ramsey è equivalente a ACA_0). Inizialmente con una certa lentezza, ma via via sempre più velocemente (soprattutto a partire da [CJS01]) si è scoperta una rete ricca e complessa di implicazioni e non implicazioni che collega un gran numero di enunciati, soprattutto nel campo della combinatorica numerabile. Il primo articolo che ha mostrato in forma anche grafica diagrammi complessi e non lineari risulta essere [HS07]. Al giorno d'oggi questi

diagrammi sono una caratteristica quasi inevitabile di ogni lavoro di reverse mathematics. Per descrivere questo fenomeno Damir Dzhafarov ha inventato la fortunata espressione "zoo della reverse mathematics". La terminologia è stata introdotta nel momento in cui Dzhafarov ha creato "un programma per aiutare ad organizzare le relazioni tra diversi principi matematici, in particolare quelli che non risultano essere equivalenti ai big five dell'aritmetica del second'ordine" (il programma e questa sua descrizione si trovano a [Dzh]). Uno zoo gestito manualmente è disponibile anche sul sito web di Ludovic Patey [Pat]. La recente monografia [Hir15] è dedicata ad una piccola parte dello zoo e comprende un capitolo che consiste esclusivamente di diagrammi, che considerano anche situazioni in cui la teoria base è differente da RCA_0.

In qualche misura lo scopo principale della ricerca contemporanea in reverse mathematics è diventato la scoperta di nuove "bestie" e delle loro relazioni con gli altri abitanti dello zoo. Questo naturalmente in parallelo a risultati che mostrano come teoremi matematici significativi siano equivalenti a qualcuno dei *Big Five*. Per citare un contributo italiano, nell'articolo di Frittaion e Marcone [FM14] si dimostra che alcuni enunciati sono dimostrabili in RCA_0, altri sono equivalenti a ACA_0, WKL_0, o ATR_0, ed infine si individuano alcuni altri enunciati dimostrabili in WKL_0 ma non in RCA_0 (questi ultimi enunciati sono stati anche successivamente studiati come inquilini dello zoo).

Lo zoo si è talmente sviluppato nella reverse mathematics contemporanea che un paio di lavori sono stati dedicati ad indagarne la struttura logica, con tra l'altro il contributo italiano di D'Agostino e Marcone [MSS15, DM16].

Per spiegare meglio la differenza tra i *Big Five* e il fenomeno dello zoo, ci soffermeremo più in dettaglio su alcune differenze che si sono rilevate tra il Lemma di König debole (l'assioma principale di WKL_0) e il teorema di Ramsey per coppie. WKL_0, come gli altri *Big Five*, è considerato un assioma "stabile": se cambiamo lievemente l'enunciato quello ottenuto risulta, in molti casi, equivalente a quello di partenza. Per esempio in WKL_0 possiamo sostituire gli alberi binari con quelli ternari, o addirittura alberi di successioni finite il cui elemento in posizione n è limitato da $f(n)$ per qualche funzione f: tutti questi enunciati sono equivalenti sulla base di RCA_0. Al contrario, il teorema di Ramsey risulta essere estremamente sensibile ai cambiamenti. Per spiegare questo fenomeno è necessario fissare la notazione. Come

già indicato nel Teorema 3, se $B \subseteq \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ indichiamo con $[B]^k$ l'insieme dei sottoinsiemi di B di cardinalità k. Se $\ell, k \geq 1$ sia RT^k_ℓ l'enunciato che asserisce che per ogni $c : [\mathbb{N}]^k \to \{0, \ldots, \ell - 1\}$ (una colorazione di $[\mathbb{N}]^k$ con ℓ colori) esiste $i < \ell$ e $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $c(x) = i$ per ogni $x \in [H]^k$ (un tale H si dice omogeneo per c). Se $k \geq 3$ e $\ell \geq 2$ allora, come già riportato nel Teorema 3, RT^k_ℓ è equivalente ad ACA_0, e lo sono pure tutti gli enunciati del tipo $\forall \ell\, \mathsf{RT}^k_\ell$ (questo può essere ricondotto alla stabilità di ACA_0). D'altra parte, per i risultati ottenuti da Hirst [Hir87] e Liu [Liu12], RT^2_2 e WKL_0 sono inconfrontabili (nessuno dei due implica l'altro). Inoltre l'enunciato $\forall \ell\, \mathsf{RT}^2_\ell$ è strettamente più forte di RT^2_2 [CJS01] e, a partire da [HS07], molte conseguenze di RT^2_2 si sono rivelate essere strettamente più deboli di RT^2_2: questi enunciati costituiscono una parte rilevante dello zoo, come lo conosciamo oggi. Ad esempio la restrizione di RT^2_2 a colorazioni c tali che $\forall i\, \exists n\, \forall j > n\, c(i, j) = c(i, n)$ conduce ad un enunciato (il cosiddetto teorema di Ramsey stabile) che è strettamente più debole di RT^2_2 [CSY14]. Due importanti elementi dello zoo sono gli enunciati (in ordine di forza strettamente decrescente) che asseriscono che ogni ordine parziale infinito contiene un'anticatena o una catena infinita, e che ogni ordine lineare infinito contiene una catena ascendente o discendente infinita. Anche a questo proposito il contributo dei ricercatori italiani è significativo: ad esempio Frittaion, a partire dalla sua tesi di dottorato, ha studiato un teorema alla Ramsey per i razionali (originariamente dovuto a Erdös e Rado) ottenendo risultati importanti con Patey [FP16] (è stato poi dimostrato che il teorema di Erdös e Rado è strettamente più forte di RT^2_2, anche in presenza di WKL_0, [DP16]: è ancora aperto il problema se esso sia, come si sospetta, strettamente più debole di ACA_0). Una recente rassegna di problemi aperti in quest'area è [Pat16a].

Già prima dell'emergere dello zoo sono stati trovati enunciati non equivalenti a nessuno dei *Big Five*: prima del cambio di prospettiva questi risultati venivano considerati come delle curiosità, se non addirittura come delle patologie. In alcuni casi gruppi di teoremi piuttosto omogenei sono risultati equivalenti tra loro e possono essere visti come analoghi in scala minore dei *Big Five*. Ad esempio WWKL_0 è una teoria intermedia tra RCA_0 e WKL_0 che risulta equivalente a diversi enunciati di teoria della misura [YS90, BGS02]. L'asserzione "l'ordine lineare ω^ω è ben ordinato" è un principio non dimostrabile in

RCA_0 e inconfrontabile con WKL_0 che permette di sviluppare alcuni argomenti per induzione transfinita [Sim88a, HS15]. Vi sono poi vari rafforzamenti dell'induzione disponibile in RCA_0 tramite principi che sono ben noti anche nel contesto dei sottosistemi dell'aritmetica di Peano. Il più debole di essi è il principio $\mathsf{B}\mathbf{\Sigma}^0_2$ di $\mathbf{\Sigma}^0_2$ limitazione, che è equivalente a $\forall \ell\, \mathsf{RT}^1_\ell$ ed anche ad alcuni teoremi veri e propri, come mostrato per primi da Frittaion e Marcone [FM12] e successivamente da Frittaion [Fri15]. Lievemente più forte è l'estensione dello schema di induzione a formule $\mathbf{\Sigma}^0_2$, riguardo a cui Frittaion, Steila e Yokoyama hanno recentemente ottenuto un interessante risultato di equivalenza [FSY16] (tra l'altro questo lavoro fa parte di un settore emergente, talvolta chiamato "reverse informatics", in cui i teoremi analizzati provengono dall'informatica teorica anziché dalla matematica classica: si vedano anche [KMPS16, KM16]).

ACA^+_0 è un rafforzamento di ACA_0 che prevede che il jump possa essere iterato ω volte, ovvero che $\forall X(X^{(\omega)}$ esiste). Carlucci e Zdanowski [CZ14] hanno dimostrato che un rafforzamento del teorema di Ramsey è equivalente a questo sistema.

Montalbán e Neeman [Mon06, Mon08, Nee08, Nee11] hanno studiato la forza di alcuni enunciati che stanno un po' al di sotto di ATR_0. La loro aggiunta a RCA_0 produce le cosiddette teorie dell'analisi iperaritmetica: per ogni $Y \subseteq \omega$ il minimo ω-modello di queste teorie che contiene Y è $\mathrm{HYP}(Y)$, la collezione degli insiemi iperaritmetici in Y. Alcuni di questi enunciati, come $\mathbf{\Delta}^1_1$-CA_0 e $\mathbf{\Sigma}^1_1$–AC_0, sono in realtà assiomi (studiati come tali nell'ambito della teoria della dimostrazione) che sono deducibili in ATR_0, ma almeno uno di essi è un vero teorema matematico (dimostrato originariamente da Jullien) sugli ordini lineari numerabili.

Enunciati matematici dimostrabili nell'aritmetica del second'ordine ma strettamente più forti di $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0 possono essere ottenuti a partire da principi, come la determinatezza e la proprietà di Ramsey, in cui la forza dell'enunciato cresce al crescere della complessità della classe coinvolta [Tan90, Tan91, MT08, Tan89]. Ad esempio la determinatezza dei giochi su ω con insieme payoff aperto è equivalente a ATR_0, se l'insieme payoff è l'intersezione tra un chiuso e un aperto si ottiene un enunciato equivalente a $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0, per insiemi payoff $\mathbf{\Delta}^0_2$ si passa ad un'estensione di $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0, e così via fino a raggiungere i limiti della determinatezza dimostrabili nell'aritmetica del second'ordine, stabiliti

da Montalbán e Shore [MS12, MS14]. Un altro importante esempio di teorema la cui forza assiomatica supera $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0 è il teorema di metrizzazione che Mummert [MS05] ha dimostrato essere equivalente a $\mathbf{\Pi}^1_2$-CA_0 sulla base di $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0.

La formulazione originaria del programma della reverse mathematics metteva l'accendo sulla dimostrabilità e quindi si inseriva naturalmente nel contesto della teoria della dimostrazione. In effetti, negli anni '90 del secolo scorso i contributi di reverse mathematics ai convegni di logica venivano collocati all'interno delle sessioni di proof-theory. Questa situazione è però mutata perché i risultati che caratterizzano lo zoo vengono quasi sempre ottenuti con tecniche e strumenti che hanno la loro origine nella teoria della computabilità. Infatti una non-implicazione viene usualmente dimostrata costruendo un ω-modello di RCA_0 che soddisfa un enunciato ma non l'altro. Questo avviene selezionando accuratamente gli insiemi che vanno a far parte dell'ω-modello attraverso strumenti quali il forcing computabile, il controllo delle iperimmunità, ecc. In alcuni casi le tecniche di computabilità si sono rivelate utili persino per la costruzione di non ω-modelli [CSY14]. Al giorno d'oggi la reverse mathematics è quindi vista prevalentemente come una parte della teoria della computabilità, e in certi casi si pone l'accento più sulla conseguenza logica in una semantica le cui interpretazioni sono gli ω-modelli. L'idea di studiare la rete di implicazioni e non-implicazioni solo rispetto agli ω-modelli è stata ad esempio proposta da Richard Shore in [Sho10] e successivamente sviluppata da molti ricercatori, in particolare coloro che hanno una formazione in teoria della computabilità.

2. Analisi computazionale e gerarchia di Weihrauch

L'analisi computazionale estende agli spazi topologici T_0 secondo numerabili la nozione ordinaria di Turing computabilità associando il concetto di computazione con quello di approssimazione; tratta pertanto le nozioni di computabilità per i numeri reali e per gli spazi metrici come casi particolari all'interno di un discorso più ampio. Suo fondamento è la *teoria delle rappresentazioni* (*Type-2 Theory of Effectivity, TTE*), originariamente introdotta da Grzegorczyk [Grz55] e Lacombe [Lac55]. Questo approccio fornisce un modello realistico

e flessibile di computazione per funzioni che abbiano come argomenti (input) e valori (output) entità codificabili tramite successioni digitali.

Il modello dell'analisi computazionale ha trovato una fondazione sistematica in [Wei00], al quale rimandiamo il lettore per maggiori dettagli.

L'idea di base della TTE consiste nella seguente osservazione: le macchine di calcolo concrete non manipolano direttamente oggetti matematici astratti, bensì eseguono computazioni su successioni di bit che costituiscono codifiche per tali oggetti. Tuttavia, gli oggetti matematici necessitano in generale di una quantità infinita di informazione per essere descritti esaustivamente (si pensi ad esempio allo sviluppo decimale di un numero irrazionale), ed è quindi naturale estendere l'ordinaria teoria della computabilità a successioni di bit infinite. La caratteristica che distingue maggiormente le macchine di Turing ordinarie da quelle TTE consiste proprio nel fatto che queste ultime operano su successioni di cifre di lunghezza *infinita*. Più precisamente, tali macchine sono dotate di un nastro di input, un nastro di lavoro, ed infine uno di output. Ciascun nastro possiede una propria testina. Tutte le ordinarie istruzioni per le macchine di Turing sono ammesse per il nastro di lavoro. Invece la testina per il nastro di input può solamente leggere il contenuto delle celle e muoversi verso destra, mentre quella del nastro di output può solamente scrivere e muoversi a sua volta verso destra. Queste limitazioni, in particolare le ultime menzionate, implicano l'impossibilità di correggere il contenuto dell'output: una volta che una cifra è stata scritta sul nastro di output questa non può più essere cancellata o modificata. Perciò ad ogni stadio della computazione l'output parziale calcolato è per lo meno affidabile; questo è il massimo che possiamo pretendere, giacché in un qualsivoglia numero finito di passaggi non è possibile ottenere l'output nella sua interezza.

Un programma per una macchina TTE consiste, come nel caso classico, di una lista finita di istruzioni.

Le successioni manipolabili da una macchina TTE attingeranno concretamente ad un numero finito di simboli, ad esempio si possono impiegare le usuali successioni binarie sull'alfabeto $\{0, 1\}$. Ciononostante a livello teorico si può utilizzare per semplicità un alfabeto infinito, come l'intero insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$: il passaggio da una stringa di numeri naturali arbitrari ad una stringa binaria che la

codifichi è sempre possibile mediante una banale traduzione, pertanto la potenza computazionale di una macchina TTE rimane inalterata da tale cambio di linguaggio. Tuttavia in questo modo si guadagna una maggiore agilità di codifica: giacché un oggetto matematico viene in generale descritto mediante l'elencazione di una quantità infinita di proprietà, e quindi di "concetti", se assegnamo a ciascuna parola binaria designata ad esprimere un concetto un determinato numero, avremo che un unico bit numerico ed un'unica cella di nastro saranno sufficienti a registrare quella parola nella descrizione dell'oggetto. Inoltre non dovremo preoccuparci di adottare pedanti tecnicismi che sarebbero necessari unicamente ai fini di distinguere tra loro parole binarie scritte di seguito in successioni infinite di bit senza spazi vuoti, tecnicismi che si rivelano del tutto irrilevanti sul piano teorico.

Dal momento che le istruzioni di una macchina TTE consistono in una lista finita di istruzioni, è possibile enumerare tali macchine in modo effettivo, in maniera analoga alle macchine di Turing usuali. La funzione ξ_k calcolata dalla k-esima macchina TTE M_k consiste di tutte le coppie $(p, q) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tali che M_k sull'input p esegue una computazione infinita producendo passo dopo passo l'intera successione q. Si può dimostrare che $\mathrm{dom}(\xi_k)$ è sempre un insieme G_δ (intersezione numerabile di insiemi aperti) nello spazio di Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (con la topologia prodotto indotta dalla topologia discreta su $\mathbb{N}$) e che le restrizioni imposte alle istruzioni di M_k per quel che riguarda il nastro di output implicano la continuità di ξ_k in tale spazio.

Come già notato da Klaus Weihrauch [Wei00, p.38], le macchine TTE possono essere anche interpretate come ordinarie macchine di Turing con oracoli; l'oracolo fornisce l'informazione contenuta nell'input secondo la descrizione precedente, e l'n-esimo bit dell'output è computato quando forniamo n come input alla macchina di Turing con oracolo. Pertanto le funzioni parziali computabili con macchine TTE coincidono con i funzionali computabili (o "ricorsivi") della teoria della computabilità classica, chiamati anche *funzionali di Lachlan*.

Da un'altra prospettiva, si può constatare come tale modello sia tuttavia perfettamente *realistico*, in quanto una macchina TTE può sempre essere sostituita da una macchina di Turing ordinaria che lavori, anziché su stringhe infinite, su loro approssimazioni finite di lunghezza via via crescente.

La definizione di funzione computabile su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è solo un primo passo

verso la definizione di funzione computabile per arbitrari spazi T_0 secondo numerabili. A tal fine abbiamo bisogno di *rappresentare* tali spazi. Nella sua accezione più generale, una *rappresentazione* σ_X di un insieme X è una funzione parziale suriettiva $\sigma_X : \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ (il simbolo $\subseteq$ indica che il dominio di σ_X è un sottoinsieme di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), e la coppia (X, σ_X) è uno *spazio rappresentato*. Dato $x \in X$, un σ_X-*nome* per x è un qualsiasi $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $\sigma_X(p) = x$. Le rappresentazioni sono l'analogo delle codifiche utilizzate in reverse mathematics per trattare gli oggetti matematici nei sottosistemi dell'aritmetica del second'ordine.

Diciamo ora che una multifunzione (ovvero, una funzione a più valori) parziale $f : \subseteq X \rightrightarrows Y$, per X e Y spazi rappresentati, è *TTE-computabile*, quando esiste una macchina TTE che trasforma un qualsiasi nome p di $x \in \mathrm{dom}(f)$ (rispetto alla rappresentazione intesa di X) in un nome di un qualche $y \in f(x)$ (rispetto alla rappresentazione intesa di Y).

La nozione di rappresentazione è in realtà troppo generale per scopi pratici, ma ci sono casi importanti nei quali possiamo definire delle rappresentazioni significative; questo avviene ad esempio proprio per gli spazi T_0 secondo numerabili. Ricordiamo che uno spazio topologico X è T_0 quando non esistono due individui di tale spazio che godano esattamente delle stesse "proprietà atomiche". Più precisamente, non esistono due individui distinti che possano appartenere esattamente agli stessi aperti di X. Inoltre, X è *secondo numerabile* quando esiste una base per gli aperti che sia numerabile, il che significa che ogni elemento della base può essere contraddistinto da un numero naturale. In questo modo, una qualsiasi enumerazione di tutte le proprietà atomiche di un oggetto $x \in X$, o più semplicemente di tutti i numeri naturali corrispondenti a tali proprietà, sarà sufficiente a denotare univocamente l'individuo x. Otteniamo così per tali spazi delle rappresentazioni significative, dette *standard*. Nel caso particolare degli spazi metrici separabili un altro tipo di rappresentazione solitamente adottata è quella di *Cauchy*, che però è su di essi equivalente alla standard: se (X, d) è uno spazio metrico separabile e $a : \mathbb{N} \to X$ è una successione densa in X, la *rappresentazione di Cauchy* $\delta_X : \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ è definita ponendo $\delta_X(p) = x \in X$ se e solo se per tutti gli i e $j \geq i$ si dà $d(a(p(i)), a(p(j))) \leq 2^{-i}$ e $x = \lim a(p(n))$. In altre parole $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è un nome di x quando codifica una successione di elementi dell'insieme denso fissato di X che converge *in maniera effettiva* ad x.

Questa definizione simula le codifiche usuali degli elementi degli spazi metrici separabili completi usati in reverse mathematics [Sim09, §II.5] (ma è da notare che in analisi computazionale nessuna condizione di completezza è imposta). Qualora la metrica $(n, m) \mapsto d(a(n), a(m))$ (da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$) sia computabile, la tripla (X, d, a) è detta *spazio metrico computabile*.

Dato uno spazio metrico computabile possiamo poi rappresentare lo spazio dei suoi sottoinsiemi aperti o quello dei suoi sottoinsiemi chiusi, e data una coppia di tali spazi possiamo rappresentare lo spazio delle funzioni continue tra di essi.

In alcuni casi le rappresentazioni possono essere così trasparenti da essere di fatto dimenticate, in particolare si può assumere che lo spazio di Baire sia rappresentato dalla funzione identità su sé stesso, e le restrizioni dell'identità ai suoi sottospazi rappresenteranno i sottospazi corrispondenti. L'identità su Baire è comunque ancora computabilmente equivalente alla rappresentazione standard di tale spazio, nonché a quella di Cauchy (ricordiamo infatti che $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è anche spazio metrico computabile). Per trattare il Teorema di Ramsey abbiamo bisogno di rappresentare lo spazio di tutte le colorazioni $c : [\mathbb{N}]^k \to \{0, \dots, \ell - 1\}$ per fissati $\ell, k \geq 1$, e una qualsiasi biezione computabile tra $[\mathbb{N}]^k$ e $\mathbb{N}$ rende ancora possibile l'utilizzo dell'identità su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, opportunamente ristretta, come rappresentazione appropriata. Una situazione analoga si propone per tutti gli oggetti studiati in combinatorica.

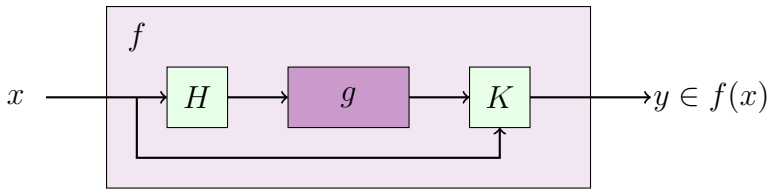
Le rappresentazioni standard, e quelle a loro equivalenti, oltre ad essere molto intuitive godono anche di una proprietà topologica fondamentale: il *Representation Theorem* di Christoph Kreiz e Klaus Weihrauch [KW85, Wei00] (detto anche *Main Theorem*) afferma che una funzione parziale monodroma $f : \subseteq X \to Y$, per X e Y spazi T_0 secondo numerabili, è continua se e solo se è simulabile da una funzione continua F nello spazio di Baire (nel senso che $F(p)$ sarà un nome di $f(x)$ ogniqualvolta p è un nome di $x \in \mathrm{dom}(f)$ rispetto alle rappresentazioni standard di X e Y, o ad altre equivalenti).

Diverse funzioni basilari dell'analisi reale o complessa, quali somma, sottrazione, prodotto, divisione, esponenziazione, e le funzioni trigonometriche, sono computabili. Non solo tali operazioni sono computabili, ma anche alcuni operatori fondamentali definiti sugli spazi di funzioni numeriche, quali ad esempio il calcolo degli integrali definiti su intervalli del tipo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ computabili, lo sono. Tuttavia altri

operatori fondamentali dell'analisi non lo sono, si pensi ad esempio all'operatore di derivazione. Possiamo dire che nel complesso molti "problemi matematici" importanti non sono computabilmente risolvibili.

Per questa ragione è stato necessario introdurre in analisi computazionale degli strumenti per classificare i diversi livelli di incomputabilità. Lo strumento ad oggi più proficuo a tal scopo è la cosiddetta *riducibilità di Weihrauch*.

La definizione originale di riducibilità di Weihrauch fu suggerita da Klaus Weihrauch e per primo indagata dal suo studente Thorsten von Stein nella sua tesi di laurea [vS89]. Un importante contributo fu dato da Weihrauch stesso in un report del 1992 rimasto inedito. La nozione continuò ad essere studiata nel corso degli anni da altri suoi studenti, senza però mai riuscire ad imporsi all'attenzione della comunità scientifica. In [GM09] Gherardi e Marcone hanno esteso la riducibilità di Weihrauch alle multifunzioni su spazi rappresentati nel seguente modo. Siano $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$ e $g :\subseteq Z \rightrightarrows W$ multifunzioni parziali tra spazi rappresentati. Diciamo che f è *Weihrauch riducibile* a g (e scriviamo $f \leq_{\mathrm{W}} g$), se esistono funzioni computabili $H :\subseteq X \rightrightarrows Z$ e $K :\subseteq X \times W \rightrightarrows Y$ tali che $K(x, gH(x)) \subseteq f(x)$ per tutti gli $x \in \mathrm{dom}(f)$, come mostrato nel seguente flow chart.



Intuitivamente, $f \leq_{\mathrm{W}} g$ significa che il problema di computare f può essere computabilmente ed uniformemente risolto usando in ciascuna istanza una singola computazione di g: H trasforma l'input di f in un input di g, mentre K trasforma, avendo accesso anche all'input originale, l'output di g in un corretto output di f. In altre parole, $f \leq_{\mathrm{W}} g$ si dà se e solo se esiste una macchina di Turing che computa f utilizzando g come oracolo esattamente una volta nel corso della computazione [TW11].

La relazione $\leq_{\mathrm{W}}$ è riflessiva e transitiva ed induce una relazione di equivalenza denotata da $\equiv_{\mathrm{W}}$ e chiamata *Weihrauch equivalenza*. L'ordine parziale sull'insieme di classi di equivalenza rispetto a $\equiv_{\mathrm{W}}$ (chiamate *gradi di Weihrauch*) è un reticolo distributivo limitato [BG11b, Pau10b] con operazioni algebriche utili e naturali [BGM12].

Se ci limitiamo alle sole funzioni che contengono punti computabili nel loro dominio, le multifunzioni computabili sono tutte Weihrauch equivalenti tra di loro e costituiscono il gradino più basso della gerarchia, come atteso.

Il reticolo di Weihrauch consente un calcolo di "problemi matematici". Un problema matematico può infatti essere identificato con una multifunzione parziale $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$: più precisamente $\mathrm{dom}(f) \subseteq X$ contiene le istanze del problema, mentre $f(x)$ è l'insieme delle soluzioni del problema f per l'istanza x. Un semplice esempio di problema matematico in questo senso è il problema degli zeri $Z_X :\subseteq C(X, \mathbb{R}) \rightrightarrows X$ per uno spazio topologico X, che associa ad una funzione continua $h : X \to \mathbb{R}$ l'insieme $Z_X(h) = \{\, x \in X : h(x) = 0 \,\}$. In questo caso $\mathrm{dom}(Z_X)$ è l'insieme delle funzioni continue in X che possiedono almeno uno zero. Molti teoremi possono essere intesi in questo modo. Per esempio, se Tr_2 è l'insieme degli alberi binari (che ha una rappresentazione "trasparente" che diamo per scontata), allora il Lemma di König debole diviene il problema matematico $\mathrm{WKL} :\subseteq \mathrm{Tr}_2 \rightrightarrows 2^{\mathbb{N}}$ tale che $\mathrm{WKL}(T) = \{\, \alpha : \forall n\, \alpha \restriction n \in T \,\}$ con $\mathrm{dom}(\mathrm{WKL}) = \{\, T \in \mathrm{Tr}_2 : T \text{ è infinito} \,\}$. Similmente, il Teorema del Valor Medio è il problema matematico $\mathrm{IVT} :\subseteq C([0,1], \mathbb{R}) \rightrightarrows \mathbb{R}$, tale che $\mathrm{IVT}(h) = \{\, x \in [0,1] : h(x) = 0 \,\}$ con $\mathrm{dom}(\mathrm{IVT}) = \{\, h \in C([0,1], \mathbb{R}) : h(0) \cdot h(1) < 0 \,\}$. D'ora in poi, nel presentare un problema matematico descriveremo il dominio in forma più sintetica, specificando le condizioni a cui deve soddisfare l'input per farne parte.

Qualora sia il dominio che il codominio de(lle multifunzioni corrispondenti a)i problemi matematici siano spazi rappresentati possiamo usare la riducibilità di Weihrauch come strumento per la loro classificazione, in particolare per la comparazione di teoremi matematici. Questa linea di ricerca è fiorita negli ultimi anni, anche grazie al contributo fondamentale di autori italiani [GM09, BG11a, BG11b, BdBP12, Pau10b, Pau10a, BGM12, BGH15b, BGH15a, DDH$^+$16, BGHP17, ADSS16].

Riportiamo alcuni esempi significativi di problemi matematici che sono stati indagati recentemente. Questi corrispondono a teoremi ben noti:

- $\mathrm{UTL_X} : C_p(X, \mathbb{R}) \rightrightarrows C(X, \mathbb{R})$ (Lemma di Urysohn-Tietze), $f \mapsto \left\{\, g \in C(X, \mathbb{R}) : g_{\restriction \mathrm{dom}(f)} = f, \sup f = \sup g, \inf f = \inf g \,\right\}$, dove X è uno spazio metrico computabile e $C_p(X, \mathbb{R})$ è la classe dei funzionali parziali continui con dominio chiuso in X;

- WKL : $\subseteq \mathrm{Tr}_2 \rightrightarrows 2^{\mathbb{N}}$ (Lemma di König debole), $T \mapsto \{\, \alpha \,:\, \forall n\, \alpha \restriction n \in T \,\}$, dove Tr_2 è l'insieme degli alberi binari e T è albero binario infinito;
- WWKL : $\subseteq \mathrm{Tr}_2 \rightrightarrows 2^{\mathbb{N}}$ (Lemma di König debole debole), $T \mapsto \{\, \alpha \,:\, \forall n\, \alpha \restriction n \in T \,\}$, dove T è albero binario infinito il cui insieme di rami infiniti ha misura positiva nello spazio di Cantor;
- $\mathrm{BWT_X} : \subseteq X^{\mathbb{N}} \rightrightarrows X$ (Teorema di Bolzano-Weierstraß), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\, x \,:\, x \text{ è punto di accumulazione della successione } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\}$, dove X è spazio metrico computabile e $\overline{\{\, x_n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}}$ è compatto in X;
- MCT : $\subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ (Teorema di Convergenza Monotona), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup\{\, x_n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$, dove $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente limitata;
- $\mathrm{BCT_X} : \subseteq \mathcal{A}_-(X)^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}$ (Teorema della Categoria di Baire), $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\, m \in \mathbb{N} \,:\, A_m^\circ \neq \emptyset \,\}$, dove X è uno spazio metrico computabile completo, $\mathcal{A}_-(X)$ è lo spazio degli insiemi chiusi di X e $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$;
- $\mathrm{IMT_{X,Y}} : \subseteq C(X,Y) \to C(Y,X)$ (Teorema della Mappa Inversa di Banach), $T \mapsto T^{-1}$, dove X e Y sono spazi di Banach computabili e T è operatore lineare biettivo;
- $\mathrm{UBT_{X,Y}} : \subseteq C(X,Y)^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}$ (Teorema di Limitatezza Uniforme), $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\, m \in \mathbb{N} \,:\, \sup\{\, ||T_n|| \,:\, n \in \mathbb{N} \,\} \leq m \,\}$, dove X e Y sono spazi di Banach computabili e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di operatori lineari limitati tali che $\{\, ||T_n(x)|| \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$ è limitato per ogni $x \in X$;
- $\mathrm{BFT}^n : C([0,1]^n) \rightrightarrows [0,1]^n$ (Teorema di Punto Fisso di Brouwer), $f \mapsto \{\, x \,:\, f(x) = x \,\}$;
- HBT : $\subseteq PBF \rightrightarrows PBF$ (Teorema di Hahn-Banach), $f \mapsto \big\{\, g \,:\, g_{\restriction \mathrm{dom}(f)} = f, ||g|| = 1 \,\big\}$, dove PBF è lo spazio dei funzionali parziali lineari limitati con dominio un sottospazio lineare chiuso di un qualche spazio di Banach computabile, e $||f|| = 1$;
- VCT_0 : $\subseteq \mathcal{I}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ (Teorema del Ricoprimento di Vitali), $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \big\{\, (I_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \,:\, \forall k \neq k'\, I_{n_k} \cap I_{n_{k'}} = \emptyset \wedge \lambda([0,1] \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{n_k}) = 0 \,\big\}$, dove $\mathcal{I}$ è lo spazio degli intervalli aperti razionali in $\mathbb{R}$ e $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ copre ogni $x \in [0,1]$ con intervalli di diametro arbitrariamente piccolo;
- VCT_1 : $\subseteq \mathcal{I}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows [0,1]$ (Teorema del Ricoprimento di Vitali), $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \big\{\, x \,:\, x \in [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \,\big\}$, dove $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è tale che

ogni $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ è contenuto in intervalli arbitrariamente piccoli di $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\lambda([0,1]\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I'_n) > 0$ per ogni sottosuccessione $(I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli disgiunti di $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

- $\mathrm{VCT}_2 : \subseteq \mathcal{I}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows [0,1]$ (Teorema del Ricoprimento di Vitali), $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\, x : x \text{ non giace in intervalli arbitrariamente piccoli di } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\}$, dove $\lambda([0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I'_n) > 0$ per ogni sottosuccessione $(I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli disgiunti di $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si noti che i tre problemi matematici VCT_0, VCT_1 e VCT_2 corrispondono ad uno stesso teorema (il Teorema del Ricoprimento di Vitali); le differenze tra di essi verranno esplicitate tra poco.

Tutti questi operatori corrispondenti a ben noti teoremi matematici sono stati classificati all'interno dei gradi di Weihrauch. Per la dimostrazione di tali risultati è stato fondamentale l'apporto dei ricercatori italiani Gherardi e Marcone. Gli operatori UTL_X e VCT_0 sono risultati essere computabili [Wei01, BGHP17], mentre HBT e BFT^n per $n \geq 2$ sono Weihrauch equivalenti a WKL [GM09, BLRMP16]. L'operatore VCT_1 è invece Weihrauch equivalente a WWKL [BGHP17]. Per quanto riguarda $\mathrm{IMT}_{X,Y}$, questo è Weihrauch riducibile al problema di individuare un numero naturale che non appartenga ad una data successione di numeri naturali fornita in input, ed è Weihrauch equivalente a tale problema per $X = Y = \ell_2$; Weihrauch equivalenti allo stesso problema di scelta di numeri naturali sono anche $\mathrm{UBT}_{X,Y}$ per $X \neq \{0\} \neq Y$ e BCT_X [BG11b]. Al contrario, il precedentemente menzionato IVT è Weihrauch equivalente al problema di selezionare un numero reale da un intervallo aperto di cui siano noti solamente i razionali più piccoli del suo estremo inferiore e quelli più grandi del suo estremo superiore [BG11b]. Per classificare altri operatori della precedente lista occorre considerare problemi più complessi, definiti mediante la composizione di problemi più semplici. Nello specifico $\mathrm{BWT}_{\mathbb{R}}$ è Weihrauch equivalente a selezionare un ramo infinito da un albero binario infinito che sia il limite di una successione di alberi [BGM12]. Per ottenere l'esatta complessità di VCT_2 dobbiamo invece considerare che la successione di alberi da un certo punto in poi diventi costante e l'insieme dei cammini infiniti dell'albero limite abbia misura positiva (nello spazio di Cantor $2^{\mathbb{N}}$) [BGHP17].

Esiste un modo ben più uniforme ed elegante di classificare molti dei problemi matematici sopra descritti, e consiste nel caratterizzarli tramite operatori di scelta per certi tipi di insiemi chiusi non vuoti,

dove di tali insiemi chiusi sia nota una descrizione esaustiva dell'aperto complementare. In altre parole, ciascuno di tali insiemi chiusi è descritto in modo che sia possibile, per ogni punto non appartenente all'insieme dato, riuscire a stabilire prima o poi che esso *non* vi appartiene. Ebbene, tali operatori di scelta devono invece individuare punti che agli insiemi chiusi dati appartengono. Abbiamo così che la complessità computazionale degli operatori computabili è equivalente alla scelta per insiemi chiusi (non vuoti) dello spazio singoletto $\{0\}$, mentre HBT e BFT^n per $n \geq 2$ sono equivalenti alla scelta per insiemi chiusi nello spazio di Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Aggiungendo la condizione che i chiusi in $2^{\mathbb{N}}$ abbiano misura positiva otteniamo VCT_1. Se invece gli insiemi chiusi di misura positiva sono presi in $\mathbb{R}$ abbiamo VCT_2. Per quanto riguarda $\mathrm{IMT}_{\ell_2,\ell_2}$, $\mathrm{UBT}_{X.Y}$ (con $X \neq \{0\} \neq Y$) e BCT_X, questi sono Weihrauch equivalenti alla scelta per insiemi (chiusi) di numeri naturali. Infine IVT è equivalente alla scelta per intervalli chiusi di reali. Un altro operatore di scelta su insiemi chiusi molto importante è quello per lo spazio di Baire, cui accenneremo nella prossima sezione.

Un vantaggio della classificazione dei teoremi matematici mediante i gradi di Weihrauch consiste nella derivazione automatica di loro significative proprietà computazionali sulla base di quelle godute dalla loro classe di appartenenza. A titolo di esempio consideriamo l'operatore IVT associato al Teorema del Valor Medio. La dimostrazione delle sue proprietà computazionali fondamentali aveva richiesto in passato argomentazioni tra loro distinte. Ad esempio, questo operatore è computabile in modo *non uniforme*, nel senso che sebbene non esista un metodo uniforme che applicato a tutti i suoi input sia in grado di determinare qualche loro zero, soddisfa per lo meno la seguente condizione più debole di computabilità: ogni funzione computabile f nel suo dominio possiede sicuramente qualche zero computabile [PER89, p. 41]. L'operatore è addirittura *uniformemente* computabile (o detto più semplicemente, computabile) qualora venga ristretto agli input f che possiedano un unico zero. Infine, era nota l'esistenza di successioni computabili $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi del suo dominio senza successioni computabili $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di zeri corrispondenti. La dimostrazione originale di quest'ultima proprietà in particolare, ad opera di Pour-El e Richards [PER89, pp. 42–43], è piuttosto complessa. Ebbene, oggi sappiamo che tutte queste, e potenzialmente anche altre, proprietà sono conseguenze immediate del fatto che IVT appartiene al grado di

Weihrauch dell'operatore di scelta per intervalli reali chiusi [BG11b].

Un'altra ragione per studiare la riducibilità di Weihrauch è la sua rilevanza per lo studio di modelli generalizzati di computazione. Questi modelli generalizzati si definiscono pagando il prezzo della perdita di affidabilità dell'output parziale elaborato ad un certo punto della computazione. Si considerino infatti le seguenti macchine TTE *generalizzate*:

(1) *macchina TTE con revisioni*: rispetto ad un'ordinaria macchina TTE può apportare modifiche all'output;
(2) *macchina TTE con oracolo*: questa variazione di macchina TTE ha accesso, oltre che all'input, anche ad una stringa binaria infinita prodotta casualmente (ad esempio tramite lanci di moneta); la macchina potrà utilizzare l'informazione contenuta in questo oracolo per trasformare l'input in output (senza eseguire su questo correzioni), ma emetterà un messaggio di *fallimento* bloccando la computazione qualora il suo programma la induca all'improvviso a considerare l'oracolo fornito non idoneo rispetto all'input.

Una multifunzione parziale $F : \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è allora detta

- *computabile con numero finito di ripensamenti*, se è computabile mediante una macchina TTE con revisioni che esegua per ogni input in $\mathrm{dom}(F)$ un numero finito, ma arbitrario, di modifiche dell'output;
- *computabile al limite*, se è computabile mediante una macchina TTE con revisioni che per ciascun input in $\mathrm{dom}(F)$ esegua un numero possibilmente infinito di modifiche dell'output, purché ciascun suo segmento iniziale prima o poi si stabilizzi fornendo così man mano il risultato definitivo;
- *non deterministicamente computabile*, se è computabile mediante una macchina TTE con oracolo la quale rigetti, per qualsiasi $p \in \mathrm{dom}(F)$, ogni oracolo *non* utile alla produzione di un qualche $q \in F(p)$;
- *Las Vegas computabile*, se è non deterministicamente computabile mediante una macchina TTE con oracolo rispetto alla quale per ogni input $p \in \mathrm{dom}(F)$ l'insieme (necessariamente chiuso) di oracoli di successo per quell'input (ovvero oracoli

non rifiutati dalla macchina) abbia misura positiva nello spazio di Cantor $2^{\mathbb{N}}$;
- *non deterministicamente computabile al limite*, se è composizione di una funzione computabile al limite con una non deterministica;
- *computazione di Las Vegas con un numero finito di ripensamenti*, se è composizione di una funzione Las Vegas computabile con una computabile mediante un numero finito di ripensamenti.

In ciascun caso con "computabile" intendiamo ovviamente dire che la macchina di riferimento produce un output corretto $q \in F(p)$ per ogni $p \in \mathrm{dom}(F)$[1]. Analogamente al caso standard, la nozione di computazione generalizzata verrà poi trasferita da F a qualsiasi multifunzione $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$, per X ed Y spazi rappresentati, che F simuli (ad esempio, se F è Las Vegas computabile, allora anche f viene detta Las Vegas computabile).

Si noti che tutte le definizioni date sono estensioni della nozione standard di computabilità.

La seguente tabella caratterizza alcuni dei teoremi matematici sopra menzionati mediante le opportune nozioni di computazione. In ciascun caso si deve intendere che la multifunzione definita dal teorema è computabile secondo la nozione ad essa corrispondente in tabella, e che essa è massimamente difficile tra tutte le multifunzioni computabili allo stesso modo. Ad esempio, la terza riga esprime il fatto che una multifunzione è computabile con un numero finito di ripensamenti se e solo se è Weihrauch riducibile al Teorema della Categoria di Baire.

$\leq_{\mathrm{W}}$	modello di computazione	riferimento
$\mathrm{UTL}_{\mathrm{X}}$	computabile	[Wei01]
HBT	non deterministicamente computabile	[GM09]
BCT_X	computabile con finiti ripensamenti	[BG11a]
MCT	computabile al limite	[BGM12]
$\mathrm{BWT}_{\mathbb{R}}$	non deterministicamente comp. al limite	[BGM12]
VCT_1	Las Vegas computabile	[BGHP17]
VCT_2	Las Vegas con finiti ripensamenti	[BGHP17]

[1]Per le computazioni non deterministiche (eventualmente di Las Vegas), si intende ovviamente che un output q corretto deve essere prodotto per ogni oracolo di successo rispetto all'input p, ed almeno un oracolo di successo deve esistere. Si noti che nel caso delle computazioni con un numero finito di ripensamenti o di quelle al limite F sarà certamente monodroma.

La nozione di computazione non deterministica, che per le stringhe infinite è dovuta a Martin Ziegler [Zie07], non è menzionata in [GM09], ma possiamo interpretare retrospettivamente alcuni risultati lì contenuti come effettivamente comprovanti l'equivalenza tra la computabilità non deterministica e la Weihrauch riducibilità al Teorema di Hahn-Banach per i numeri reali. Le funzioni computabili non deterministicamente sono anche dette *debolmente computabili* in [BG11b]. Nello stesso articolo, Vasco Brattka e Guido Gherardi hanno dimostrato che qualora Y sia uno spazio metrico computabile, ogni funzione monodroma $f :\subseteq X \to Y$ che sia non deterministicamente computabile è anche computabile in modo standard. Arno Pauly e Matthew de Brecht commentano questo risultato in [PdB14, p. 89] nel seguente modo, facendo riferimento anche al lavoro dell'italiano Stefano Galatolo: "Le macchine TTE non deterministiche non sono proposte come un modello realistico di computazione, ma —proprio come nel caso classico— come uno strumento concettuale utile per comprendere le computazioni deterministiche. Un aspetto innovativo è la disponibilità di teoremi non banali che rimuovono il non determinismo. Spesso, fornire un algoritmo non deterministico (con spazio dei suggerimenti compatto) per una funzione è molto più semplice che produrre direttamente un algoritmo deterministico. Un metateorema ([BG11b, BdBP12]) permette poi di rimuovere il non determinismo ed ottenere un algoritmo deterministico. Implicitamente, un tale approccio è già esibito in [Ret12] da Rettinger per la computabilità delle curve di Jordan, e da Galatolo, Hoyrup e Robas in [GHR11] per mostrare risultati di computabilità per misure invarianti." Questo risultato sulla computabilità standard delle funzioni monodrome non deterministicamente computabili è stato di recente generalizzato da Matthias Schröder [Sch16].

Così come la teoria della complessità classica utilizza una versione polinomiale della riducibilità di Turing, versioni polinomiali della riducibilità di Weihrauch sono state impiegate da Stephen Cook e Akitoshi Kawamura [KC10] per sviluppare la teoria della complessità per il continuo. Tra i risultati dimostrati da Kawamura, ricordiamo la dimostrazione di PSPACE-completezza per certi sistemi di equazioni differenziali con condizioni iniziali di Lipschitz computabili polinomialmente [Kaw10].

In effetti l'estensione della teoria della complessità di calcolo al

mondo del continuo è un fertile ambito di applicazione dell'analisi computazionale (i manuali classici di riferimento al riguardo sono [Ko91] e [Wei00]), come anche lo studio della risoluzione delle equazioni differenziali [WZ02, WZ05, WZ07]. In generale, l'analisi computazionale può trovare in linea di principio applicazioni concrete in ambiti di applicazione tradizionalmente di dominio del calcolo numerico, tuttavia la particolare sensibilità della prima riguardo alle proprietà topologiche degli spazi e delle funzioni può consentire l'elaborazione di metodi efficaci per la certificazione della correttezza degli algoritmi utilizzati, oppure evidenziarne le criticità per la presenza di punti di discontinuità. La risoluzione concreta dei sistemi di equazioni differenziali mediante algoritmi fondati sui principi dell'analisi computazionale è oggetto di studio di ricercatori quali Norbert Müller [BKM16]. Per quanto riguarda invece l'analisi della complessità di compressione dell'informazione, recenti sviluppi hanno consentito di individuare connessioni molto interessanti con la teoria della *casualità*. Com'è ben noto, in teoria della computabilità sono state avanzate diverse proposte di formalizzazione del concetto intuitivo di *numero reale casuale*. Ebbene, diversi ricercatori, tra i quali Vasco Brattka, Joe Miller, André Nies, Steve Simpson, e Rupert Hölzl [PRS14, BHMN14, BMN16] hanno dimostrato l'esistenza di connessioni sorprendenti tra alcuni di tali concetti e la nozione fondamentale di differenziabilità. A titolo di esempio, ricordiamo un risultato in [BMN16] secondo il quale un numero reale è casuale di Martin-Löf se e solo se ogni funzione computabile a variazione limitata è differenziabile in esso.

3. Analogie e differenze tra i due approcci

Molti enunciati studiati in reverse mathematics hanno la forma $\forall X(\varphi(X) \to \exists Y\, \psi(X,Y))$. Un enunciato in questa forma può essere interpretato in modo del tutto naturale come un problema matematico nel senso della sezione precedente. Un'istanza del problema è qualche X soddisfacente $\varphi(X)$, ed una soluzione per questa istanza è qualche (in generale non unico) Y per cui $\psi(X,Y)$ vale. Questo problema conduce immediatamente alla multifunzione parziale con dominio $\{\, X \,:\, \varphi(X) \,\}$ e tale che $f(X) = \{\, Y \,:\, \psi(X,Y) \,\}$ è l'insieme non vuoto di soluzioni per l'istanza X del problema. In questo modo gli enunciati della reverse mathematics possono essere confrontati anche comparando le corrispondenti multifunzioni mediante la riducibilità di Weihrauch.

Vediamo quindi che sia la reverse mathematics che la riducibilità di Weihrauch permettono di confrontare e classificare teoremi matematici. In [GM09] Gherardi e Marcone hanno iniziato a confrontare i due approcci che da allora sono stati spesso utilizzati fianco a fianco. Siano Φ e Ψ due enunciati dell'aritmetica del second'ordine, e supponiamo che inducano rispettivamente multifunzioni f_Φ e f_Ψ. In generale, non c'è relazione tra "RCA_0 prova $\Psi \to \Phi$" e "$f_\Phi \leq_{\mathrm{W}} f_\Psi$", e non è neppure già detto che "RCA_0 prova Φ" implichi "f_Φ è computabile " o viceversa.

Come osservato in [GM09], questa "è una conseguenza dei diversi metodi e obiettivi dei due approcci. Da una parte, i sottosistemi dell'aritmetica del second'ordine studiati in reverse mathematics usano liberamente principi classici senza contenuto algoritmico, come il terzo escluso e le dimostrazioni per assurdo. D'altro lato, gli algoritmi dell'analisi computazionale assumono l'esistenza degli oggetti che devono calcolare, senza necessità di dimostrarla"[GM09, p. 405]. Ancora, "all'analista computazionale è permesso effettuare una ricerca illimitata di un oggetto che si sa esistere grazie ad una conoscenza matematica (non costruttiva), mentre lo studioso di reverse mathematics ha l'onere di una dimostrazione di esistenza con risorse limitate"[GM09, p. 395]. Per fare un esempio banale, in reverse mathematics il fatto che un insieme chiuso non vuoto contenga qualche elemento è una totale ovvietà dovuta alla semplice definizione del concetto di "non vuoto", pertanto una tale proprietà è data in RCA_0 in modo immediato in virtù della sola logica. Al contrario, abbiamo visto che per l'analista computazionale gli operatori di scelta per gli insiemi chiusi (non vuoti) non sono in generale computabili: non è l'esistenza dei loro elementi ad essere messa in discussione, ma il fatto di poterne esibire alcuni concretamente mediante una computazione. Viceversa, consideriamo il Teorema di Heine-Borel, che asserisce che l'intervallo $[0, 1]$ è compatto. In reverse mathematics si fa uso del Lemma di König debole per dimostrare l'esistenza per ogni ricoprimento aperto di $[0, 1]$ di un suo sottoricoprimento finito. Tale sottoricoprimento viene infatti identificato mediante la costruzione di un certo albero binario T che risulta non contenere rami infiniti; l'albero sarà pertanto finito proprio in virtù del Lemma di König debole. Se T ha n elementi allora n insiemi del ricoprimento aperto dato sono sufficienti a coprire $[0, 1]$. Il Teorema di Heine Borel è quindi dimostrabile in WKL_0 (ma non in RCA_0, essendo esso proprio equivalente a WKL_0, come indicato nel

Teorema 2). L'analisi computazionale al contrario non deve dimostrare la validità del teorema: la garanzia della sua validità è fornita dalla matematica classica. La domanda da risolvere è quindi solamente se sia possibile riuscire a trovare un sottoricoprimento finito del ricoprimento dato mediante un algoritmo. Si consideri allora un qualsiasi ricoprimento aperto $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di $[0,1]$. Ciascun insieme aperto O_i sarà rappresentato come successione di intervalli aperti a estremi razionali dei quali esso costituirà l'unione. Quella che quindi abbiamo nei fatti è una doppia successione di intervalli aperti a estremi razionali. Il Teorema di Heine-Borel classico ci assicura che un numero finito di intervalli della nostra doppia successione sarà sufficiente a coprire $[0,1]$, e a questo punto diventa un compito computabilmente piuttosto banale identificarne un campione adatto. Una volta trovato questo, si potrà immediatamente risalire, per ognuno degli intervalli razionali selezionati, a quale insieme aperto di $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenga. In questo modo si può trovare agevolmente un sottoricoprimento finito $(O_n)_{n\leq k}$ di $[0,1]$ in modo *effettivo*. Pertanto l'operatore corrispondente al Teorema di Heine-Borel è computabile.

Un'altra proprietà che distingue i due approcci è la sensibilità rispetto all'uniformità che caratterizza l'analisi computazionale. Abbiamo ad esempio visto che IVT, l'operatore definito dal Teorema del Valor Medio, non è computabile, e la ragione della sua incomputabilità risiede nella mancanza di un metodo *uniforme*, universalmente applicabile a tutti gli input del suo dominio, in grado di produrre un output corretto. Ma abbiamo anche visto che tale operatore è computabile in modo *non uniforme*, nel senso che esistono sempre degli output computabili per ogni input computabile. Estendendo il risultato a tutti gli input possibili, concludiamo che esistono sempre degli output computabili a partire dall'informazione contenuta negli input. Non è quindi sorprendente che il Teorema del Valor Medio sia dimostrabile in RCA_0, dove non viene richiesta la messa a punto di un algoritmo in grado di trasformare uniformemente gli input in output.

In altri casi significativi tuttavia i due approcci giungono a conclusioni del tutto analoghe. È il caso ad esempio del Lemma di Estensione di Urysohn-Tietze (enunciato dimostrabile in RCA_0 con operatore corrispondente computabile), del Teorema di Hahn-Banach e di quello del Punto Fisso di Brouwer (entrambi equivalenti a WKL_0 in reverse mathematics, e con operatori Weihrauch equivalenti all'operatore WKL

in analisi computazionale).

Bisogna tuttavia osservare che l'analisi computazionale è particolarmente sensibile alla *forma logica* in cui un enunciato viene espresso. Sotto questo aspetto la riducibilità di Weihrauch, sebbene la sua teoria sia fondata sulla logica classica, è più assimilabile all'ambito *costruttivista* (in realtà esistono anche varianti della reverse mathematics basate sulla logica intuizionista, ma di queste versioni, al giorno d'oggi ancora relativamente poco sviluppate, non ci occuperemo in questo articolo). Come primo esempio, ricordiamo i tre operatori VCT_0, VCT_1 e VCT_2 analizzati nella precedente sezione. Come abbiamo visto, il potere computazionale di questi tre operatori è assai differente. Eppure tutti e tre derivano dallo stesso teorema classico, il Teorema del Ricoprimento di Vitali. Nel dettaglio, essi corrispondono a tre formulazioni dello stesso teorema che sono equivalenti nella logica classica. Queste sono, nell'ordine:

(0) Ogni successione $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli aperti razionali che costituisca un ricoprimento di Vitali di $[0,1]$ (tale cioè che ogni punto di $[0,1]$ sia ricoperto da elementi di $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di diametro arbitrariamente piccolo) contiene una sottosuccessione $(I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi disgiunti tali che $\mu([0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I'_n) = 0$.

(1) Per ogni successione $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli aperti razionali che copra ciascun punto in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ con intervalli arbitrariamente piccoli e che non contenga alcuna sottosuccessione $(I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi disgiunti tali che $\mu([0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I'_n) = 0$, esiste un punto $x \in [0,1]$ che non è coperto dalla successione.

(2) Per ogni successione $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli aperti razionali che non contenga nessuna sottosuccessione $(I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi disgiunti tali che $\mu([0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I'_n) = 0$, esiste un punto $x \in [0,1]$ che non è coperto da elementi della successione di diametro arbitrariamente piccolo.

La reverse mathematics non distingue tra queste tre diverse formulazioni dello stesso enunciato, essendo classicamente equivalenti. Secondo la reverse mathematics, come dimostrato grazie anche al contributo dell'italiana Mariagnese Giusto, il Teorema di Vitali (in una formulazione ancor più generale) è, *in toto*, equivalente a WWKL_0 [BGS02], risultato in accordo con la classificazione di VTC_1 nella gerarchia di Weihrauch, ma non di VTC_0 e VTC_2.

Un altro caso ben noto è quello del Teorema della Categoria di Baire.

L'operatore non computabile BCT considerato nella precedente sezione è in realtà definito dalla forma contrapposta di tale teorema (ogni ricoprimento numerabile di uno spazio metrico completo tramite chiusi contiene almeno un insieme con parte interna non vuota). L'operatore che invece corrisponde alla versione diretta di tale teorema (ogni spazio metrico completo non è unione numerabile di insiemi chiusi con parte interna vuota), ovvero l'operatore che data una successione di insiemi chiusi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n^\circ = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ restituisce un qualche $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, è invece computabile [Bra01] Nuovamente, la reverse mathematics non può distinguere tra le due forme di enunciato, ed è nota la dimostrabilità del Teorema della Categoria di Baire in RCA_0 [BS93], risultato in accordo solo con il secondo dei risultati menzionati per l'analisi computazionale.

Nel complesso, la riducibilità di Weihrauch è spesso vista come un raffinamento della reverse mathematics. Ciò può essere spiegato e reso più preciso nel modo seguente. Supponiamo che Φ e Ψ siano enunciati $\mathbf{\Pi}^1_2$ della forma $\forall X(\varphi(x) \to \exists Y\, \varphi'(X,Y))$ e $\forall X(\psi(x) \to \exists Y\, \psi'(X,Y))$ rispettivamente (un caso tipico degli enunciati del livello di ATR_0 o inferiori), dove φ, φ', ψ, e ψ' sono formule aritmetiche. Allora la scelta naturale per f_Φ è la multifunzione con dominio $\{\, X : \varphi(x) \,\}$ tale che $f_\Phi(X) = \{\, Y : \varphi'(X,Y) \,\}$, e similmente per f_Ψ. In questo caso $f_\Phi \leq_{\mathrm{W}} f_\Psi$ implica che ogni ω-modello di $\mathsf{RCA}_0 + \Psi$ soddisfi anche Φ. Come già notato al termine della sezione precedente questa nozione di riduzione (denotata con $\Phi \leq_\omega \Psi$) sta ricevendo sempre maggiore attenzione a partire da [Sho10].

Per illustrare il raffinamento dei risultati della reverse mathematics fornito dalla riducibilità di Weihrauch ritorniamo sul Teorema di Ramsey. Se $k \geq 2$ e $2 \leq \ell < \ell'$, gli enunciati RT^k_ℓ e $\mathsf{RT}^k_{\ell'}$ sono equivalenti in RCA_0. È ovvio che $\mathsf{RT}^k_{\ell'}$ implichi RT^k_ℓ, mentre l'implicazione inversa è ottenuta da un semplice argomento nel quale per risolvere un'istanza di $\mathsf{RT}^k_{\ell'}$ applichiamo RT^k_ℓ ripetutamente, più precisamente $\lceil \log_\ell(\ell') \rceil$ volte. Denotiamo con RT^k_ℓ e $\mathsf{RT}^k_{\ell'}$ anche le multifunzioni corrispondenti che mappano una colorazione appropriata di $[\mathbb{N}]^k$ nell'insieme dei suoi insiemi omogenei. Allora $\mathsf{RT}^k_{\ell'} \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{RT}^k_\ell$ [BR15, HJ16] e questo fornisce una dimostrazione rigorosa della necessità di applicazioni iterate di RT^k_ℓ nella dimostrazione di $\mathsf{RT}^k_{\ell'}$.

Un esempio di fondamentale importanza concernente la sensibilità

dell'analisi computazionale verso l'uso iterato di operatori non computabili riguarda l'iterazione dell'operatore lim, il quale restituisce il limite delle successioni convergenti nello spazio di Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (esso è equivalente al già menzionato operatore MCT). Qui viene messa in luce un'altra profonda connessione tra analisi computazionale e topologia, che rappresenta una generalizzazione dei rapporti tra computabilità e continuità. La gerarchia delle funzioni boreliane è un importante strumento utilizzato in topologia e teoria descrittiva degli insiemi per misurare il livello di discontinuità di una funzione tra spazi metrici separabili. Per definire questa gerarchia si utilizza la gerarchia degli insiemi boreliani, di cui richiamiamo solamente i livelli finiti. Dato uno spazio metrico X, la classe degli insiemi aperti viene indicata con $\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$ e quella dei chiusi come $\mathbf{\Pi}^0_1(X)$. Gli elementi della classe $\mathbf{\Sigma}^0_{k+1}(X)$, per $k \geq 1$, sono le unioni numerabili di elementi in $\mathbf{\Pi}^0_k(X)$, mentre quelli di $\mathbf{\Pi}^0_{k+1}(X)$ sono i complementari dei membri di $\mathbf{\Sigma}^0_{k+1}(X)$. Una funzione $f : X \to Y$, per X ed Y spazi metrici, è detta *Borel misurabile* se per ogni $O \in \mathbf{\Sigma}^0_1(Y)$ si ha che $f^{-1}(O)$ è un insieme boreliano. Vi sono poi casi più specifici di rilevante interesse per la loro regolarità, in particolare $f : X \to Y$ è detta $\mathbf{\Sigma}^0_k$-*misurabile* se $f^{-1}(O) \in \mathbf{\Sigma}^0_k(X)$ per ogni $O \in \mathbf{\Sigma}^0_1(Y)$. Nella versione effettiva della teoria descrittiva degli insiemi ed in analisi computazionale si considera anche una versione computazionale della precedente nozione: f è $\mathbf{\Sigma}^0_k$-*computabile* se esiste un modo computabile uniforme di trasformare ciascun $O \in \mathbf{\Sigma}^0_1(Y)$ nell'insieme $f^{-1}(O) \in \mathbf{\Sigma}^0_k(X)$, secondo una rappresentazione naturale degli insiemi boreliani di livello k. Intuitivamente, tanto più si sale di livello in tali gerarchie, tanto più le funzioni diventano, rispettivamente, discontinue ed incomputabili. Ebbene, rileggendo a posteriori un risultato di Vasco Brattka [Bra05], si ha che una funzione monodroma $f : X \to Y$, per X ed Y spazi metrici computabili, è $\mathbf{\Sigma}^0_{k+1}$-computabile se e solo se è Weihrauch riducibile alla k-esima composizione di lim con sé stesso. Se indeboliamo la condizione di Weihrauch riducibilità ammettendo che le funzioni di riduzione H e K utilizzate nella sua definizione possano essere semplicemente continue (o, equivalentemente, computabili rispetto ad un oracolo), allora catturiamo perfettamente il concetto di $\mathbf{\Sigma}^0_{k+1}$-misurabilità in modo analogo. Ricordiamo anche un risultato di Brattka, de Brecht e Pauly [BdBP12] il quale mostra che $f : X \to Y$, per X ed Y spazi polacchi (ovvero, separabili e completamente metrizzabili) computabili, è Borel misurabile se e solo se è

riducibile alla scelta per insiemi chiusi (non vuoti) nello spazio di Baire mediante funzioni di riduzione H e K continue. I livelli finiti della gerarchia boreliana sono chiaramente connessi con la classificazione delle formule dell'aritmetica utilizzata in reverse mathematics e descritta nella prima sezione, ed è naturale affermare che la composizione di lim con sé stesso $k-1$ volte, per $k \geq 1$, corrisponde alla $\mathbf{\Sigma}^0_k$-comprensione. In reverse mathematics però la $\mathbf{\Sigma}^0_k$-comprensione è equivalente a ACA_0 e quindi l'intera gerarchia collassa, perdendo il parallelismo con la topologia.

Uniformità e sensibilità all'iterazione sono quindi caratteristiche che distinguono l'analisi computazionale dalla reverse mathematics. Per evidenziare esclusivamente gli aspetti di sensibilità all'iterazione, un'altra nozione di riducibilità tra problemi che ignora la condizione di uniformità, ma mantiene le altre proprietà della riducibilità di Weihrauch, è stata introdotta da Dzhafarov [Dzh15]. Date le multifunzioni parziali tra spazi rappresentati $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$ e $g :\subseteq Z \rightrightarrows W$, diciamo che f è *computabilmente riducibile* a g se per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ esiste $z \leq_T x$ con $z \in \mathrm{dom}(g)$ tale che per ogni $w \in g(z)$ esiste $y \leq_T x \oplus w$ tale che $y \in f(x)$ (qui la Turing riducibilità $\leq_T$ ed il join $\oplus$ vanno intesi sugli elementi di $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ che rappresentano gli oggetti di X, Y, Z e W). Rispetto alla definizione di Weihrauch riducibilità sono scomparse le riduzioni H e K (che garantivano l'uniformità): l'algoritmo che produce z a partire dall'input x può dipendere da x e anche l'algoritmo che dati x e w produce la soluzione y del problema originario non è necessariamente sempre lo stesso.

Pertanto la riducibilità computabile si trova in una posizione intermedia tra la riducibilità di Weihrauch e l'implicazione sugli ω-modelli. Ad esempio Ludovic Patey [Pat16b] ha mostrato che, per $k \geq 2$ e $2 \leq \ell < \ell'$, RT^k_ℓ è strettamente più debole rispetto alla riducibilità computabile di $\mathsf{RT}^k_{\ell'}$ migliorando i risultati precedentemente citati. Il recente articolo [HJ16] confronta la riducibilità computabile ed altre riducibilità nel caso del Teorema di Ramsey e di alcuni suoi corollari, mentre [ADSS16] mostra esempi interessanti di multifunzioni che sono computabilmente equivalenti ma non Weihrauch equivalenti. Notiamo che i risultati negativi sulla riducibilità computabile sono più forti dei risultati corrispondenti nella riducibilità di Weihrauch, e sono spesso visti come un primo passo per dimostrare la non implicabilità su RCA_0.

Tutto il lavoro svolto ad oggi sulla riducibilità di Weihrauch si è

concentrato sui livelli bassi o medi rispetto alla classificazione della reverse mathematics, ossia sulle multifunzioni che corrispondono a teoremi dimostrabili in ACA_0 (ed in molti casi più deboli di ACA_0). Ci sono probabilmente almeno due ragioni che possono spiegare questo fenomeno: innanzitutto, questo è il livello dove lo zoo della reverse mathematics si presenta nella maniera più spettacolare, e quindi diviene più naturale utilizzare proprio in quest'area strumenti per una classificazione più fine che esibisca più drasticamente la struttura di non equivalenza; inoltre, dal punto di vista dell'analisi computazionale è stato naturale cominciare a considerare prevalentemente multifunzioni che sono "quasi" computabili, o meglio, che lo sono in qualche senso generalizzato. A questo punto sorge però naturalmente la seguente domanda: "Come si presenta la gerarchia di Weihrauch per i livelli più alti della reverse mathematics?".

In realtà, l'osservazione che enunciati differenti equivalenti ad ATR_0 esibiscono diversi comportamenti computazionali è già stata fatta in [MMS12]. In quell'articolo, scritto da Marcone insieme a due rinomati esperti di teoria della computabilità, è stata indagata la forza computazionale di un teorema sui buoni ordini parziali equivalente ad ATR_0 all'interno della gerarchia di Turing e dei gradi iperaritmetici. Negli ultimi paragrafi dell'introduzione i risultati ottenuti sono stati confrontati con altri risultati noti riguardanti altri teoremi equivalenti ad ATR_0, concludendo che "abbiamo almeno quattro o cinque diversi livelli di complessità computazionale per teoremi che sono assiomaticamente equivalenti a ATR_0". Partendo da questa osservazione, è interessante confrontare in modo sistematico dal punto di vista computazionale teoremi equivalenti a, o più forti di, ATR_0. Come già ricordato, i principi di scelta per gli insiemi chiusi appaiono come significative "pietre miliari" ai livelli più bassi della gerarchia di Weihrauch. I primi risultati preliminari ottenuti recentemente da Andrea Cettolo e Alberto Marcone sembrerebbero suggerire che questo potrebbe essere il caso anche a livelli superiori.

Riassumendo, possiamo dire che il punto di vista della riducibilità di Weihrauch complementa l'approccio della reverse mathematics ed ormai i due paradigmi sono considerati come due aspetti di un unico programma scientifico di classificazione e confronto della forza computazionale dei teoremi matematici. Un'importante testimonianza di ciò è stato il seminario *Measuring the Complexity of Computational*

Content: Weihrauch Reducibility and Reverse Analysis del 2015 a Dagstuhl [BKMP16], organizzato da Brattka, Kawamura, Marcone e Pauly. Questa conferenza, il primo incontro internazionale interamente dedicato al soggetto, ha stabilito oltre ogni dubbio la forte connessione che lega la reverse mathematics e la riducibilità di Weihrauch.

Riferimenti bibliografici

[ADSS16] Eric P. Astor, Damir D. Dzhafarov, Reed Solomon, and Jacob Suggs. The uniform content of partial and linear orders. *Annals of Pure and Applied Logic*, pages –, 2016.

[BdBP12] Vasco Brattka, Matthew de Brecht, and Arno Pauly. Closed choice and a uniform low basis theorem. *Ann. Pure Appl. Logic*, 163(8):986–1008, 2012.

[BG11a] Vasco Brattka and Guido Gherardi. Effective choice and boundedness principles in computable analysis. *Bull. Symbolic Logic*, 17(1):73–117, 2011.

[BG11b] Vasco Brattka and Guido Gherardi. Weihrauch degrees, omniscience principles and weak computability. *J. Symbolic Logic*, 76(1):143–176, 2011.

[BGH15a] Vasco Brattka, Guido Gherardi, and Rupert Hölzl. Las Vegas computability and algorithmic randomness. In *32nd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, volume 30 of *LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.*, pages 130–142+1 unnumbered page. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2015.

[BGH15b] Vasco Brattka, Guido Gherardi, and Rupert Hölzl. Probabilistic computability and choice. *Inform. and Comput.*, 242:249–286, 2015.

[BGHP17] Vasco Brattka, Guido Gherardi, Rupert Hölzl, and Arno Pauly. The Vitali covering theorem in the Weihrauch lattice. In Adam Day, Michael Fellows, Noam Greenberg, Bakhadyr Khoussainov, Alexander Melnikov, and Frances Rosamond, editors, *Computability and Complexity: Essays Dedicated to Rodney G. Downey on the Occasion of His 60th Birthday*, pages 188–200. Springer International Publishing, Cham, 2017.

[BGM12] Vasco Brattka, Guido Gherardi, and Alberto Marcone. The Bolzano-Weierstrass theorem is the jump of weak Kőnig's lemma. *Ann. Pure Appl. Logic*, 163(6):623–655, 2012.

[BGS02] Douglas K. Brown, Mariagnese Giusto, and Stephen G. Simpson. Vitali's theorem and WWKL. *Arch. Math. Logic*, 41(2):191–206, 2002.

[BHMN14] Laurent Bienvenu, Rupert Hölzl, Joseph S. Miller, and André Nies. Denjoy, Demuth and density. *J. Math. Log.*, 14(1):1450004, 35, 2014.

[BKM16] Franz Braße, Margarita Korovina, and Norbert Th. Müller. Towards using exact real arithmetic for initial value problems. In Manuel

Mazzara and Andrei Voronkov, editors, *Perspectives of System Informatics: 10th International Andrei Ershov Informatics Conference, PSI 2015, in Memory of Helmut Veith, Kazan and Innopolis, Russia, August 24-27, 2015, Revised Selected Papers*, pages 61–74, Cham, 2016. Springer International Publishing.

[BKMP16] Vasco Brattka, Akitoshi Kawamura, Alberto Marcone, and Arno Pauly. Measuring the Complexity of Computational Content (Dagstuhl Seminar 15392). *Dagstuhl Reports*, 5(9):77–104, 2016.

[BLRMP16] Vasco Brattka, Stéphane Le Roux, Joseph S. Miller, and Arno Pauly. The Brouwer fixed point theorem revisited. In *Pursuit of the universal*, volume 9709 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 58–67. Springer, [Cham], 2016.

[BMN16] Vasco Brattka, Joseph S. Miller, and André Nies. Randomness and differentiability. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(1):581–605, 2016.

[BR15] Vasco Brattka and Tahina Rakotoniaina. On the uniform computational content of Ramsey's theorem. arXiv:1508.00471, 2015.

[Bra01] Vasco Brattka. Computable versions of Baire's category theorem. In *Mathematical foundations of computer science, 2001 (Mariánské Lázně)*, volume 2136 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 224–235. Springer, Berlin, 2001.

[Bra05] Vasco Brattka. Effective Borel measurability and reducibility of functions. *MLQ Math. Log. Q.*, 51(1):19–44, 2005.

[BS93] Douglas K. Brown and Stephen G. Simpson. The Baire category theorem in weak subsystems of second-order arithmetic. *J. Symbolic Logic*, 58(2):557–578, 1993.

[CJS01] Peter A. Cholak, Carl G. Jockusch, and Theodore A. Slaman. On the strength of Ramsey's theorem for pairs. *J. Symbolic Logic*, 66(1):1–55, 2001.

[CSY14] C. T. Chong, Theodore A. Slaman, and Yue Yang. The metamathematics of stable Ramsey's theorem for pairs. *J. Amer. Math. Soc.*, 27(3):863–892, 2014.

[CZ14] Lorenzo Carlucci and Konrad Zdanowski. The strength of Ramsey's theorem for coloring relatively large sets. *J. Symb. Log.*, 79(1):89–102, 2014.

[DDH$^+$16] François G. Dorais, Damir D. Dzhafarov, Jeffry L. Hirst, Joseph R. Mileti, and Paul Shafer. On uniform relationships between combinatorial problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(2):1321–1359, 2016.

[DM16] Giovanna D'Agostino and Alberto Marcone. The logic of the reverse mathematics zoo. *Mathematical Structures in Computer Science*, pages 1–17, 11 2016.

[DP16] Damir D. Dzhafarov and Ludovic Patey. Coloring trees in reverse mathematics. arXiv:1609.02627, 2016.

[Dzh] Damir D. Dzhafarov. Reverse Mathematics Zoo. `http://rmzoo.math.uconn.edu/`.

[Dzh15] Damir D. Dzhafarov. Cohesive avoidance and strong reductions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(2):869–876, 2015.

[FM12] Emanuele Frittaion and Alberto Marcone. Linear extensions of partial orders and reverse mathematics. *MLQ Math. Log. Q.*, 58(6):417–423, 2012.

[FM14] Emanuele Frittaion and Alberto Marcone. Reverse mathematics and initial intervals. *Ann. Pure Appl. Logic*, 165(3):858–879, 2014.

[FP16] Emanuele Frittaion and Ludovic Patey. Coloring the rationals in reverse mathematics. *Computability*, 2016. published online.

[Fri75] Harvey Friedman. Some systems of second order arithmetic and their use. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1*, pages 235–242. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975.

[Fri76] Harvey Friedman. Systems of second order arithmetic with restricted induction, i, ii (abstracts). *J. Symbolic Logic*, 41(2):557559, 1976.

[Fri15] Emanuele Frittaion. Brown's Lemma in second-order arithmetic. arXiv:1512.04195, to appear in Fundamenta Mathematicae, 2015.

[FSY16] Emanuele Frittaion, Silvia Steila, and Keita Yokoyama. The strength of the SCT criterion. arXiv:1611.05176, 2016.

[GHR11] Stefano Galatolo, Mathieu Hoyrup, and Cristobal Rojas. Dynamics and abstract computability: computing invariant measures. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 29(1):193–212, 2011.

[GM09] Guido Gherardi and Alberto Marcone. How incomputable is the separable Hahn-Banach theorem? *Notre Dame J. Form. Log.*, 50(4):393–425 (2010), 2009.

[Grz55] A. Grzegorczyk. Computable functionals. *Fund. Math.*, 42:168–202, 1955.

[HB68] David Hilbert and Paul Bernays. *Grundlagen der Mathematik. I.* Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[HB70] David Hilbert and Paul Bernays. *Grundlagen der Mathematik. II.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Hir87] Jeffry L. Hirst. *Combinatorics in Subsystems of Second Order Arithmetic*. PhD thesis, The Pennsylvania State University, 1987.

[Hir15] Denis R. Hirschfeldt. *Slicing the truth*, volume 28 of *Lecture Notes Series. Institute for Mathematical Sciences. National University of Singapore*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015. On the computable and reverse mathematics of combinatorial principles, Edited and with a foreword by Chitat Chong, Qi Feng, Theodore A. Slaman, W. Hugh Woodin and Yue Yang.

[HJ16] Denis R. Hirschfeldt and Carl G. Jockusch. On notions of computability-theoretic reduction between Π^1_2 principles. *Journal of Mathematical Logic*, 16(01):1650002, 2016.

[HS07] Denis R. Hirschfeldt and Richard A. Shore. Combinatorial principles weaker than Ramsey's theorem for pairs. *J. Symbolic Logic*, 72(1):171–206, 2007.

[HS15] Kostas Hatzikiriakou and Stephen G. Simpson. Reverse mathematics, Young diagrams, and the ascending chain condition. arXiv:1510.03106, 2015.

[Kaw10] Akitoshi Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Comput. Complexity*, 19(2):305–332, 2010.

[KC10] Akitoshi Kawamura and Stephen Cook. Complexity theory for operators in analysis. In *STOC'10—Proceedings of the 2010 ACM International Symposium on Theory of Computing*, pages 495–502. ACM, New York, 2010.

[KM16] Leszek Aleksander Kołodziejczyk and Henryk Michalewski. How unprovable is Rabin's decidability theorem? In *Proceedings of the 31st Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, LICS '16, pages 788–797, New York, NY, USA, 2016. ACM.

[KMPS16] Leszek Aleksander Kołodziejczyk, Henryk Michalewski, Pierre Pradic, and Michal Skrzypczak. The logical strength of Büchi's decidability theorem. In Jean-Marc Talbot and Laurent Regnier, editors, *25th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2016)*, volume 62 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 36:1–36:16, Dagstuhl, Germany, 2016. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

[Ko91] Ker-I Ko. *Complexity theory of real functions*. Progress in Theoretical Computer Science. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.

[KW85] Christoph Kreitz and Klaus Weihrauch. Theory of representations. *Theoret. Comput. Sci.*, 38(1):35–53, 1985.

[Lac55] Daniel Lacombe. Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. I. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 240:2478–2480, 1955.

[Liu12] Jiayi Liu. RT^2_2 does not imply WKL_0. *J. Symbolic Logic*, 77(2):609–620, 2012.

[MMS12] Alberto Marcone, Antonio Montalbán, and Richard A. Shore. Computing maximal chains. *Arch. Math. Logic*, 51(5-6):651–660, 2012.

[Mon06] Antonio Montalbán. Indecomposable linear orderings and hyperarithmetic analysis. *J. Math. Log.*, 6(1):89–120, 2006.

[Mon08] Antonio Montalbán. On the Π^1_1-separation principle. *MLQ Math. Log. Q.*, 54(6):563–578, 2008.

[Mon11] Antonio Montalbán. Open questions in reverse mathematics. *Bull. Symbolic Logic*, 17(3):431–454, 2011.

[MS05] Carl Mummert and Stephen G. Simpson. Reverse mathematics and Π^1_2 comprehension. *Bull. Symbolic Logic*, 11(4):526–533, 2005.

[MS12] Antonio Montalbán and Richard A. Shore. The limits of determinacy in second-order arithmetic. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 104(2):223–252, 2012.

[MS14] Antonio Montalbán and Richard A. Shore. The limits of determinacy

in second order arithmetic: consistency and complexity strength. *Israel J. Math.*, 204(1):477–508, 2014.

[MSS15] Carl Mummert, Alaeddine Saadaoui, and Sean Sovine. The modal logic of Reverse Mathematics. *Arch. Math. Logic*, 54(3-4):425–437, 2015.

[MT08] MedYahya Ould MedSalem and Kazuyuki Tanaka. Weak determinacy and iterations of inductive definitions. In *Computational prospects of infinity. Part II. Presented talks*, volume 15 of *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.*, pages 333–353. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.

[Nee08] Itay Neeman. The strength of Jullien's indecomposability theorem. *J. Math. Log.*, 8(1):93–119, 2008.

[Nee11] Itay Neeman. Necessary use of Σ^1_1 induction in a reversal. *J. Symbolic Logic*, 76(2):561–574, 2011.

[Pat] Ludovic Patey. Manually maintained Zoo. `http://www.ludovicpatey.com/media/research/zoo.pdf`.

[Pat16a] Ludovic Patey. Open questions about Ramsey-type statements in reverse mathematics. *Bull. Symb. Log.*, 22(2):151–169, 2016.

[Pat16b] Ludovic Patey. The weakness of being cohesive, thin or free in reverse mathematics. *Israel J. Math.*, 216(2):905–955, 2016.

[Pau10a] Arno Pauly. How incomputable is finding Nash equilibria? *J.UCS*, 16(18):2686–2710, 2010.

[Pau10b] Arno Pauly. On the (semi)lattices induced by continuous reducibilities. *MLQ Math. Log. Q.*, 56(5):488–502, 2010.

[PdB14] Arno Pauly and Matthew de Brecht. Non-deterministic computation and the Jayne-Rogers theorem. In Benedikt Löwe and Glynn Winskel, editors, Proceedings 8th International Workshop on *Developments in Computational Models,* Cambridge, United Kingdom, 17 June 2012, volume 143 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 87–96. Open Publishing Association, 2014.

[PER89] Marian B. Pour-El and J. Ian Richards. *Computability in analysis and physics*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[PRS14] Noopur Pathak, Cristóbal Rojas, and Stephen G. Simpson. Schnorr randomness and the Lebesgue differentiation theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(1):335–349, 2014.

[Ret12] Robert Rettinger. Compactness and the effectivity of uniformization. In S. Barry Cooper, Anuj Dawar, and Benedikt Löwe, editors, *How the World Computes: Turing Centenary Conference and 8th Conference on Computability in Europe, CiE 2012, Cambridge, UK, June 18-23, 2012. Proceedings*, pages 616–625, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg.

[Sch16] Matthias Schroder. On sequentially compact choice and overt choice. talk at Computability and Complexity in Analysis, Faro, Portugal, 2016.

[Sho10] Richard A. Shore. Reverse mathematics: the playground of logic. *Bull. Symbolic Logic*, 16(3):378–402, 2010.

[Sim88a] Stephen G. Simpson. Ordinal numbers and the Hilbert basis theorem. *J. Symbolic Logic*, 53(3):961–974, 1988.

[Sim88b] Stephen G. Simpson. Partial realizations of Hilbert's Program. *J. Symbolic Logic*, 53(2):349–363, 1988.

[Sim09] Stephen G. Simpson. *Subsystems of second order arithmetic*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, Cambridge; Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, NY, second edition, 2009.

[SS95] David Seetapun and Theodore A. Slaman. On the strength of Ramsey's theorem. *Notre Dame J. Formal Logic*, 36(4):570–582, 1995. Special Issue: Models of arithmetic.

[Tan89] Kazuyuki Tanaka. The Galvin-Prikry theorem and set existence axioms. *Ann. Pure Appl. Logic*, 42(1):81–104, 1989.

[Tan90] Kazuyuki Tanaka. Weak axioms of determinacy and subsystems of analysis. I. Δ^0_2 games. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 36(6):481–491, 1990.

[Tan91] Kazuyuki Tanaka. Weak axioms of determinacy and subsystems of analysis. II. Σ^0_2 games. *Ann. Pure Appl. Logic*, 52(1-2):181–193, 1991. International Symposium on Mathematical Logic and its Applications (Nagoya, 1988).

[TW11] Nazanin R. Tavana and Klaus Weihrauch. Turing machines on represented sets, a model of computation for analysis. *Log. Methods Comput. Sci.*, 7(2):2:19, 21, 2011.

[vS89] Thorsten von Stein. Vergleich nicht konstruktiv lösbarer Probleme in der Analysis. Master's thesis, FernUniversität Hagen, 1989.

[Wei00] Klaus Weihrauch. *Computable analysis*. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer-Verlag, Berlin, 2000. An introduction.

[Wei01] Klaus Weihrauch. On computable metric spaces Tietze-Urysohn extension is computable. In *Computability and complexity in analysis (Swansea, 2000)*, volume 2064 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 357–368. Springer, Berlin, 2001.

[Wey18] Hermann Weyl. *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Veit, Leipzig, 1918.

[WZ02] Klaus Weihrauch and Ning Zhong. The solution operator of the Korteweg-de Vries equation is computable. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 66(1):189 – 201, 2002. {CCA} 2002, Computability and Complexity in Analysis (ICALP 2002 Satellite Workshop).

[WZ05] Klaus Weihrauch and Ning Zhong. Computing the solution of the Korteweg-de Vries equation with arbitrary precision on Turing machines. *Theoret. Comput. Sci.*, 332(1-3):337–366, 2005.

[WZ07] Klaus Weihrauch and Ning Zhong. Computable analysis of the abstract

Cauchy problem in a Banach space and its applications. I. *MLQ Math. Log. Q.*, 53(4-5):511–531, 2007.

[YS90] Xiaokang Yu and Stephen G. Simpson. Measure theory and weak König's lemma. *Arch. Math. Logic*, 30(3):171–180, 1990.

[Zie07] Martin Ziegler. Real hypercomputation and continuity. *Theory Comput. Syst.*, 41(1):177–206, 2007.

Dipartimento di Filosofia, Università di Bologna
E-mail address: guido.gherardi@unibo.it

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche, Università di Udine
E-mail address: alberto.marcone@uniud.it
URL: http://users.dimi.uniud.it/~alberto.marcone/